

Μαθηματική Επαγωγή

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Σ. Ζάχος, Δ. Σούλιου**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Τεχνικές Απόδειξης

- Εξαντλητική μέθοδος: **πεπερασμένος** αριθμός περιπτώσεων.
- Απόδειξη για $p \rightarrow q$:
 - Ευθέως: αιτιολογούμε ότι συμπέρασμα q έπεται από υπόθεση p .
 - **Αντιθετοαναστροφή**: αιτιολογούμε ότι η άρνηση της υπόθεσης ($\neg p$) έπεται από την άρνηση του συμπεράσματος ($\neg q$).
 - Ιδιότητα $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
 - Π.χ. αν n^2 άρτιος, τότε n άρτιος.
 - **Απαγωγή σε άτοπο**: Υποθέτουμε ότι $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$ και αιτιολογούμε **αντίφαση**.
 - Π.χ. το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος (Πυθαγόρας).
- Μαθηματική Επαγωγή.

Αποδείξεις Ύπαρξης

- Κατασκευαστικές αποδείξεις ύπαρξης.
 - Αλγόριθμος κατασκευής του ζητούμενου.
- Μη κατασκευαστικές αποδείξεις ύπαρξης.
 - Αρχή περιστερώννα.
 - Αν m μπάλες σε n κουτιά και $m > n$, τότε κάποιο κουτί έχει περισσότερες από 1 μπάλες.
 - Επιχειρήματα ισοτιμίας και καταμέτρησης.
 - Κάθε ακυκλικό κατευθυνόμενο γράφημα με «πηγή», έχει «καταβόθρα».
 - Κάθε (μη κατευθυνόμενο) γράφημα έχει άρτιο αριθμό κορυφών περιττού βαθμού.
 - Πιθανοτική μέθοδος.
 - Αν κάτι έχει θετική πιθανότητα να επιλεγεί από (κατάλληλο) δειγματοχώρο, τότε υπάρχει.

Μαθηματική Επαγωγή

- Αποδεικνύουμε ότι « $P(n)$ αληθεύει για κάθε φυσικό $n \geq n_0$ ».
 - **Δομική επαγωγή:** όλα τα στοιχεία (αριθμήσιμα) άπειρου συνόλου που ορίζεται αναδρομικά έχουν ιδιότητα P .

Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής

- Έστω $P(n)$ μια πρόταση που εξαρτάται από φυσικό αριθμό n .
- Για νδο $P(n)$ αληθεύει για κάθε φυσικό $n \geq n_0$, αρκεί νδο:
 - **Βάση:** το $P(n_0)$ αληθεύει.
 - **Βήμα:** για κάθε $n \geq n_0$, αν $P(n)$ αληθεύει, τότε $P(n+1)$ αληθεύει.

Αρχή Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής

- Για νδο $P(n)$ αληθεύει για κάθε $n \geq n_0$, αρκεί νδο:
 - **Βάση:** το $P(n_0)$ αληθεύει.
 - **Βήμα:** για κάθε $n \geq n_0$, αν $P(k)$ αληθεύει για κάθε $k \in \{n_0, \dots, n\}$, τότε $P(n+1)$ αληθεύει.

Όροι Γεωμετρικής Προόδου

- Να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 0$, $1+2+\dots+2^n = 2^{n+1} - 1$.
 - Πρόταση $P(n) \equiv \ll 1+2+\dots+2^n = 2^{n+1} - 1 \gg$.
 - Βάση: Αληθεύει για $n = 0$: $2^0 = 1 = 2 - 1$.
 - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) $n \geq 0$, αληθεύει $P(n)$, δηλ. ότι $1+2+\dots+2^n = 2^{n+1} - 1$.
 - Επαγωγικό βήμα: Θδο αληθεύει $P(n+1)$, δηλ. ότι $1+2+\dots+2^n+2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$.

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 2 + 2^2 \dots + 2^n}_{=2^{n+1}-1} + 2^{n+1} &= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\ &= 2^{n+2} - 1 \end{aligned}$$

- Νδο για κάθε $r \neq 1$ και $n \geq 0$,

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Αρμονικοί Αριθμοί

- Αρμονικός αριθμός τάξης k : $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$
- Να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 0$, $1 + \frac{n}{2} \leq H_{2^n} \leq 1 + n$
 - Συνεπώς $1 + \frac{1}{2} \log_2 k \leq H_k \leq 1 + \log_2 k$
 - Άνω φράγμα, πρόταση $P(n) \equiv \ll H_{2^n} \leq 1 + n \gg$
 - Βάση: Αληθεύει για $n = 0$: $H_1 = 1 = 1 + 0$.
 - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) $n \geq 0$, αληθεύει $P(n)$, δηλ. ότι $H_{2^n} \leq 1 + n$

Αρμονικοί Αριθμοί

- **Επαγωγικό βήμα:** Θδο αληθεύει $P(n+1)$,
δηλ. ότι $H_{2^{n+1}} \leq 1 + (n + 1)$

$$\begin{aligned} H_{2^{n+1}} &= \overbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}}^{=H_{2^n} \leq 1+n} + \frac{1}{2^n+1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &\leq 1 + n + \overbrace{\frac{1}{2^n+1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}}^{2^n \text{ όροι} < \frac{1}{2^n}} \\ &\leq 1 + n + 2^n \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + (n + 1) \end{aligned}$$

Διαιρετότητα

- Να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$, το $n^3 + 2n$ διαιρείται από το 3.
 - **Βάση:** Αληθεύει για $n = 1$: Το 3 διαιρείται από το 3.
 - **Επαγωγική υπόθεση:** Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) $n \geq 1$, το $n^3 + 2n$ διαιρείται από το 3.
 - **Επαγωγικό βήμα:** Θδο το $(n+1)^3 + 2(n+1)$ διαιρείται από το 3.
 - Πράγματι,

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 2(n+1) \\ &= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1),\end{aligned}$$

όπου και οι δύο όροι διαιρούνται από το 3 (ο 1^{ος} λόγω της επαγωγικής υπόθεσης).

Πληθάριθμος Δυναμοσυνόλου

- Νδο για κάθε (πεπερασμένο) **σύνολο** A με n **στοιχεία**, το **δυναμοσύνολο** του A έχει 2^n **στοιχεία**.
 - Μαθηματική επαγωγή στο n (πληθικό αριθμό συνόλου A).
 - **Βάση:** Αληθεύει για $n = 0$: $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ και $|P(\emptyset)| = 2^0$.
 - **Επαγωγική υπόθεση:** Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) $n \geq 0$, αληθεύει ότι για κάθε σύνολο A με $|A| = n$, $|P(A)| = 2^n$.
 - **Επαγωγικό βήμα:** Θδο \forall σύνολο A με $|A| = n+1$, $|P(A)| = 2^{n+1}$.
 - A (αυθαίρετα επιλεγμένο) σύνολο με $n+1$ στοιχεία.
Θεωρούμε $x \in A$ και $A_x = A - \{x\}$ με $|A_x| = n$.
 - Κάθε υποσύνολο του A είτε περιέχει το x είτε όχι.
 - Σε κάθε υποσύνολο $S \subseteq A_x$ αντιστοιχούν **δύο** υποσύνολα του A : το S και το $S \cup \{x\}$.
 - Άρα $|P(A)| = 2 \cdot |P(A_x)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Λάθος Χρώμα!

- Να βρείτε το **λάθος** στον παρακάτω επαγωγικό συλλογισμό.
- Θδο για κάθε $n \geq 1$, σε **κάθε σύνολο n** αυτοκινήτων, **όλα** τα αυτοκίνητα έχουν το **ίδιο χρώμα**.
 - **Βάση:** Ισχύει για $n = 1$.
 - **Επαγωγική υπόθεση:** Έστω ότι για (αυθαίρετα επιλεγμένο) $n \geq 1$, σε κάθε σύνολο n αυτοκινήτων, όλα έχουν το ίδιο χρώμα.
 - **Επαγωγικό βήμα:** Θδο σε κάθε σύνολο $n+1$ αυτοκινήτων, όλα έχουν το ίδιο χρώμα.
 - Σύνολο με $n+1$ αυτοκίνητα: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$
 - Από επαγ. υπόθεση, τα **n πρώτα** αυτοκίνητα έχουν **ίδιο χρώμα**, και **n τελευταία** αυτοκίνητα έχουν **ίδιο χρώμα**:
$$\underbrace{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}}_{\text{ίδιο χρώμα}} \qquad \underbrace{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\}}_{\text{ίδιο χρώμα}}$$
 - Αφού **σύνολο n πρώτων** και **σύνολο n τελευταίων** αυτοκινήτων έχουν **κοινά** στοιχεία, όλα τα αυτοκ. στο A έχουν ίδιο χρώμα!

Λάθος Χρώμα!

- **Επαγωγικό βήμα:** Θδο σε κάθε σύνολο $n+1$ αυτοκινήτων, όλα έχουν το ίδιο χρώμα.
 - Σύνολο με $n+1$ αυτοκίνητα: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$
 - Από επαγ. υπόθεση, τα n πρώτα αυτοκίνητα έχουν **ίδιο χρώμα**, και n τελευταία αυτοκίνητα έχουν **ίδιο χρώμα**:

$$\overbrace{\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}}^{\text{ίδιο χρώμα}}$$

$$\{a_1, \overbrace{a_2, \dots, a_n, a_{n+1}}^{\text{ίδιο χρώμα}}\}$$

- Αφού **σύνολο n πρώτων** και **σύνολο n τελευταίων** αυτοκινήτων έχουν **κοινά** στοιχεία, όλα τα αυτοκ. στο A έχουν ίδιο χρώμα!
- Για $n = 1$, τα δύο σύνολα **δεν** έχουν **κοινά** στοιχεία!
- Εδώ ισχύει ότι $P(1)$ και ότι $P(n) \rightarrow P(n+1)$ για κάθε $n \geq 2$.
 - **Δεν ισχύει ότι $P(1) \rightarrow P(2)$:** αυτό καθιστά συμπέρασμα αβάσιμο!

Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

- Κάποτε χρήσιμο να αποδείξουμε **ισχυρότερη** πρόταση $P'(n)$.
 - Είναι δυνατό να **μην** ισχύει ότι $P(n) \rightarrow P(n+1)$, αλλά να ισχύει $P'(n) \rightarrow P'(n+1)$, για **ισχυρότερη** πρόταση $P'(n)$.

- Νδο. για κάθε $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} \leq 2$$

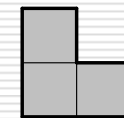
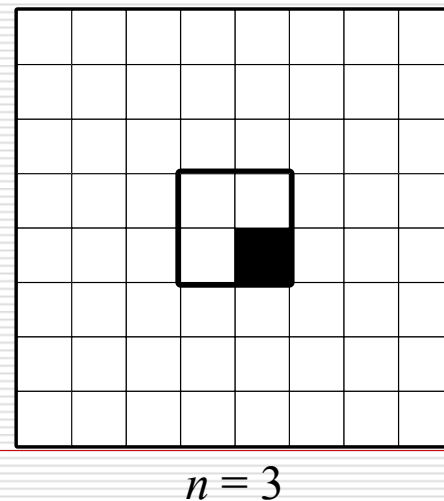
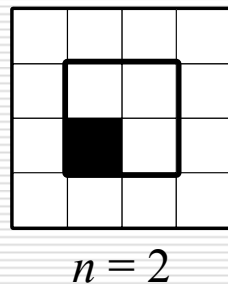
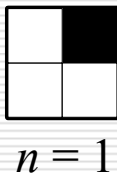
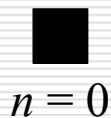
- Επαγωγική υπόθεση $S_n \leq 2$ δεν συνεπάγεται ότι $S_{n+1} \leq 2$.

- Ευκολότερο νδ (επαγωγικά) ότι για κάθε $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

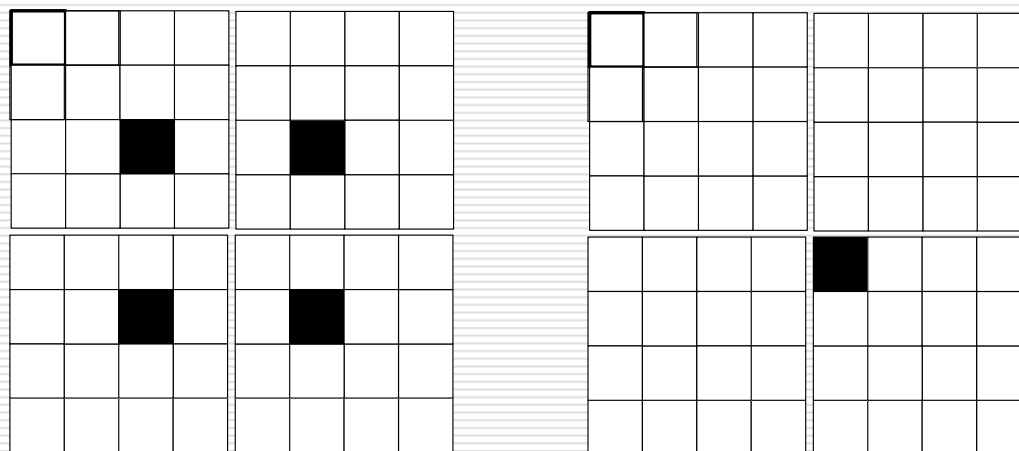
- Κάποτε χρήσιμο να αποδείξουμε **ισχυρότερη** πρόταση $P'(n)$.
 - Είναι δυνατό να **μην** ισχύει ότι $P(n) \rightarrow P(n+1)$, αλλά να ισχύει $P'(n) \rightarrow P'(n+1)$, για **ισχυρότερη** πρόταση $P'(n)$.
- **Σκακιέρα** τάξης n με **μαύρο στο κέντρο**: τετράγωνη σκακιέρα με $2^n \times 2^n$ τετράγωνα, όλα **λευκά** εκτός από **ένα μαύρο** στο **κέντρο**.
- Ν.δ.ο. για κάθε $n \geq 0$, **λευκά** τετράγωνα **σκακιέρας** τάξης n με **μαύρο στο κέντρο** **καλύπτονται** από **πλακίδια** σχήματος **L** (μη επικαλυπτόμενα).



Πλακίδιο
σχήματος L

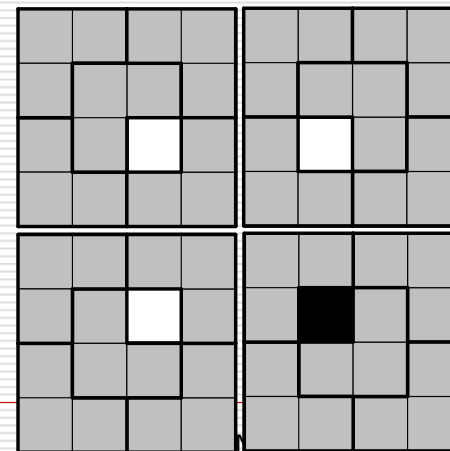
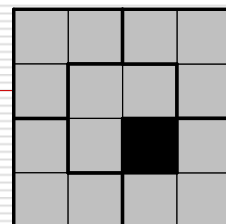
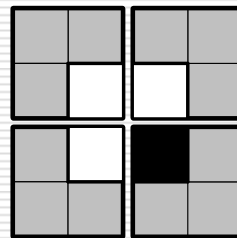
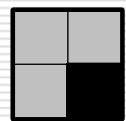
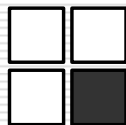
Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

- Βάση: $P(0)$ ισχύει (δεν υπάρχουν λευκά τετράγωνα).
- Επαγωγικό βήμα:
 - Σκακιέρα τάξης $n+1$ με μαύρο στο κέντρο:
ένωση 4 σκακιέρων τάξης n με μαύρο στο κέντρο,
3 μαύρα γίνονται λευκά, 1 μαύρο μετακινείται στο κέντρο.



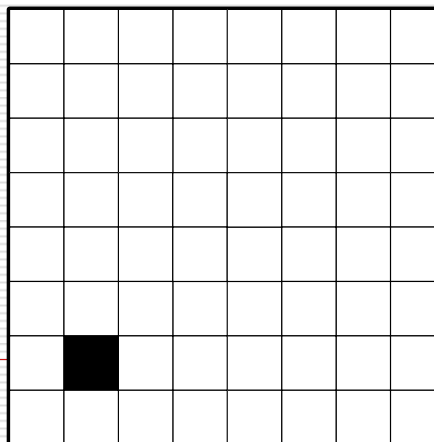
Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

- Βάση: $P(0)$ ισχύει (δεν υπάρχουν λευκά τετράγωνα).
- Επαγωγικό βήμα:
 - $P(0) \rightarrow P(1)$, $P(1) \rightarrow P(2)$: 3 νέα λευκά καλύπτονται με 1 πλακίδιο.
- $P(2) \rightarrow P(3)$;
 - Λευκά όχι γειτονικά, μετακινήσεις επηρεάζουν διάταξη πλακιδίων!
 - Χρήση επαγωγικής υπόθεσης όχι προφανής!
- Δυσκολία λόγω **περιορισμού** ότι μαύρο **στο κέντρο!**



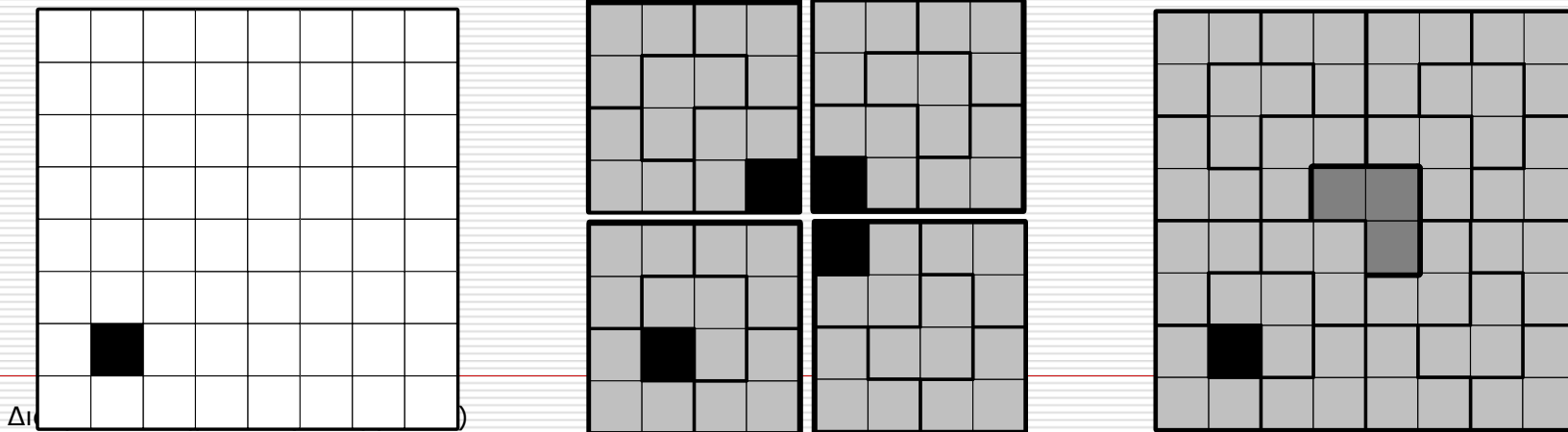
Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

- **Σκακιέρα τάξης n :** τετράγωνη σκακιέρα με $2^n \times 2^n$ τετράγωνα, όλα **λευκά** εκτός από **ένα μαύρο** (οπουδήποτε).
- Ν.δ.ο. για κάθε $n \geq 0$, **λευκά** τετράγωνα **σκακιέρας τάξης n** **καλύπτονται** από **πλακίδια σχήματος L** (μη επικαλυπτόμενα).
 - Πρόταση $P'(n)$ **ισχυρότερη** από αρχική $P(n)$.
 - **Βάση:** $P'(0)$ ισχύει τετριμένα.
 - **Επαγωγική υπόθεση:** για (αυθαίρετα επιλεγμένο) $n \geq 0$, αληθεύει ότι **λευκά** τετράγωνα **οποιασδήποτε** σκακιέρας τάξης n **καλύπτονται** από πλακίδια σχήματος L .



Ρόλος Επαγωγικής Υπόθεσης

- Σκακιέρα τάξης $n+1$: 4 σκακιέρες τάξης n (τεταρτημόρια).
 - 1 με μαύρο τετράγωνο σε αντίστοιχη θέση.
 - 3 με μαύρα τετράγωνα σε άκρα, ώστε γειτονικά κεντρικά τετράγωνα σε σκακιέρα $n+1$.
- Από επαγωγική υπόθεση, λευκά τετράγωνα σε τεταρτημόρια καλύπτονται από πλακίδια L.
- Νέα λευκά τετράγωνα σχηματίζουν L: καλύπτονται με πλακίδιο.



Παράδειγμα Ισχυρής Επαγωγής

- Νδο κάθε τμήμα τουλ. 18 φοιτητών διαμερίζεται σε ομάδες 4 ή 7 φοιτητών.
 - Για κάθε φυσικό $n \geq 18$, υπάρχουν φυσικοί κ_n, λ_n : $n = 4\kappa_n + 7\lambda_n$.
- Βάση: επαλήθευση για $n = 18, 19, 20, 21$.
- Επαγωγική υπόθεση: για (αυθαίρετα επιλεγμ.) φυσικό $n \geq 21$, ισχύει ότι για κάθε φυσικό $m, 18 \leq m \leq n$:
 - Υπάρχουν φυσικοί κ_m, λ_m : $m = 4\kappa_m + 7\lambda_m$.
- Επαγωγικό βήμα: Θδο υπάρχουν φυσικοί $\kappa_{n+1}, \lambda_{n+1}$:
$$n+1 = 4\kappa_{n+1} + 7\lambda_{n+1}.$$
 - Επαγ. υπόθεση για $n - 3$, και $\kappa_{n+1} = \kappa_{n-3} + 1$ και $\lambda_{n+1} = \lambda_{n-3}$:
$$4(\kappa_{n-3} + 1) + 7\lambda_{n-3} = \underbrace{(4\kappa_{n-3} + 7\lambda_{n-3})}_{=n-3} + 4 = n + 1$$
- Αρκεί βάση για $n = 18$; Γιατί $n \geq 21$ στην υπόθεση;

Και Άλλο Λάθος!

- Θδο όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι άρτιοι(;)!
 - Βάση: ισχύει ότι το 0 είναι άρτιος.
 - Επαγωγική υπόθεση: για (αυθαίρετα επιλεγμένο) φυσικό $n \geq 0$, ισχύει ότι για κάθε m , $0 \leq m \leq n$, το m είναι άρτιος.
 - Επαγωγικό βήμα: Θδο το $n+1$ είναι άρτιος.
 - Επαγωγική υπόθεση: το n και το 1 είναι άρτιοι.
 - Άρα $n+1$ άρτιος, ως άθροισμα δύο άρτιων!
- Απόδειξη βήματος **δεν** ισχύει για $n = 0$!
 - Χρησιμοποιεί ότι το 1 είναι άρτιος χωρίς απόδειξη (στη βάση) και χωρίς να εμπίπτει στην επαγωγική υπόθεση!