

Κλειστότητες Σχέσεων

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Σ. Ζάχος, Δ. Σούλιου**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

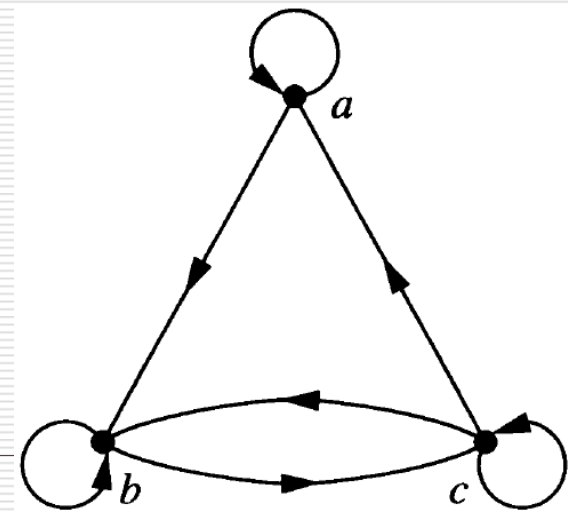
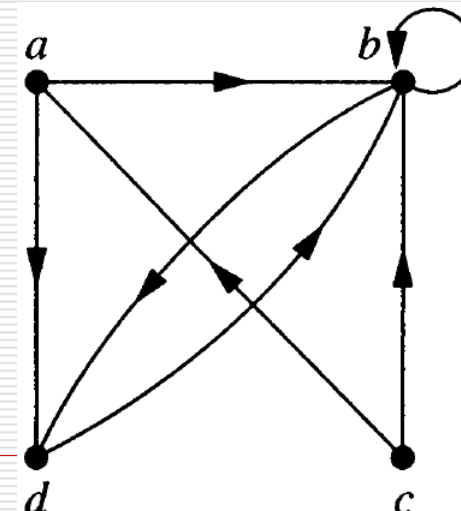
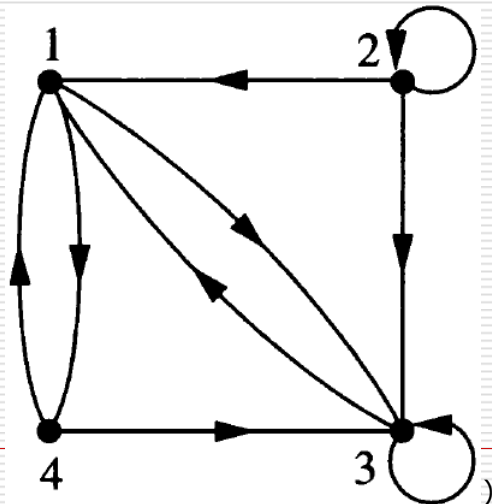
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Κλειστότητα Σχέσης

- **Κλειστότητα** σχέσης R ως προς ιδιότητα P : σχέση S που
 - (α) περιέχει την R (δηλ. $R \subseteq S$),
 - (β) έχει την ιδιότητα P , και
 - (γ) είναι «ελάχιστη», δηλ. περιέχεται σε κάθε σχέση που έχει (α), (β).
- Κλειστότητα **επεκτείνει** R όσο χρειάζεται ώστε να έχει **ιδιότητα P** .
- Ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική κλειστότητα;



Ανακλαστική Κλειστότητα

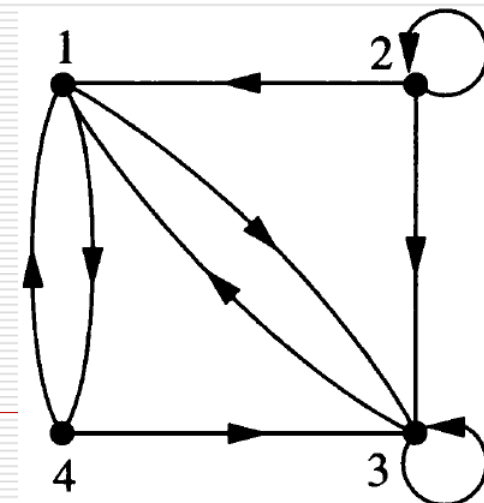
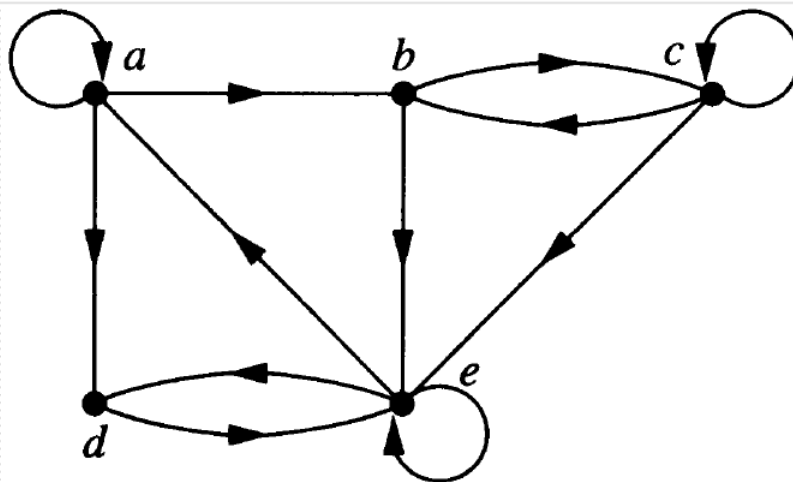
- ... σχέσης $R \subseteq A \times A$: $R \cup \{(a, a) : a \in A\}$.
 - Περιέχει R , είναι ανακλαστική, είναι ελάχιστη.
- Ανακλαστική κλειστότητα σχέσης $R = \{(a, \beta) : a < \beta\}$;
 - $R' = \{(a, \beta) : a \leq \beta\}$.

Συμμετρική Κλειστότητα

- ... σχέσης $R \subseteq A \times A$: $R \cup R^{-1}$.
 - $R \cup \{(\beta, \alpha) : (\alpha, \beta) \in R\}$
 - Περιέχει R , είναι συμμετρική, είναι ελάχιστη.
- Συμμετρική κλειστότητα σχέσης $R = \{(a, \beta) : a < \beta\}$;
 - $R'' = \{(a, \beta) : a \neq \beta\}$.

Μεταβατική Κλειστότητα

- «Διαδρομή» μήκους $k \geq 0$ σε σχέση R : ακολουθία $a_0, \dots, a_k \in A$ τ.ω. $(a_i, a_{i+1}) \in R$ για κάθε $i < k$.
- $R^n = \{(a, \beta) : \text{υπάρχει } a - \beta \text{ διαδρομή μήκους } n \text{ στην } R\}$, $n \geq 1$.
- R μεταβατική αν $R^n \subseteq R$, για κάθε $n \geq 1$.
- $R^* = \{(a, \beta) : \text{υπάρχει } a - \beta \text{ διαδρομή στην } R\}$ ή $R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$
 - Αν R μεταβατική, τότε $R^* = R$ ($R \subseteq R^*$ και $R^* \subseteq R$).



Μεταβατική Κλειστότητα

- **Μεταβατική κλειστότητα** σχέσης $R = R^*$.
 - $R \subseteq R^*$: ακμή (α, β) είναι διαδρομή μήκους 1.
 - R^* μεταβατική: $\alpha - \beta, \beta - \gamma$ διαδρομές, $\alpha - \beta - \gamma$ διαδρομή.
 - R^* ελάχιστη: έστω S μεταβατική σχέση με $R \subseteq S$. Θδο. $R^* \subseteq S$.
 - S μεταβατική $\Rightarrow S = S^*$.
 - $R \subseteq S \Rightarrow R^* \subseteq S^*$ (κάθε διαδρομή στην R είναι διαδρομή στην S).
 - Άρα $R^* \subseteq S$.

Υπολογισμός R^*

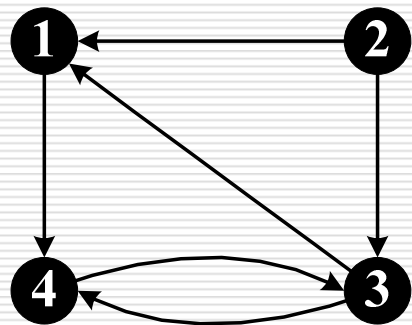
- $a - \beta$ διαδρομή στην R αν $\exists a - \beta$ διαδρομή μήκους $\leq |A|$.
 - Αν συντομότερη $a - \beta$ διαδρομή στην R έχει μήκος $> |A|$: κάποια κορυφή επαναλαμβάνεται (διαδρομή περιέχει κύκλο).
 - Αφαίρεση κύκλου: $a - \beta$ διαδρομή με μικρότερο μήκος. Άτοπο!
- Υπολογισμός R^* : $R^* = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$
 - R^k με Boolean πολλαπλασιασμό πινάκων από R^{k-1} και R .
 - Ένωση με λογική διάζευξη πινάκων.
 - Χρόνος: $O(n^4)$, $n = |A|$.

Αλγόριθμος Warshall

- Για R^* ισχύει ότι: $R^*(i, j) = R(i, j) \vee \exists k (R^*(i, k) \wedge R^*(k, j))$
 - Υπολογισμός με παραπάνω ιδέα μοιάζει με **φαύλο κύκλο**:
 $R^*(i, j)$ απαιτεί $R^*(i, k)$ και το $R^*(i, k)$ απαιτεί το $R^*(i, j)$.
- Όμως γίνεται **προσεκτικά** και **συστηματικά** (Warshall)!
 - Αυθαίρετη αρίθμηση στοιχείων (κορυφών) του A : $\{1, 2, \dots, n\}$
 - $P^{[k]} = \{(i, j): \exists i - j \text{ διαδρομή με εσωτερικές κορυφές μόνο από } [k]\}$
 - Ισχύει ότι $R^* = P^{[n]}$.
 - $P^{[0]} = R$ και $P^{[k]}(i, j) = P^{[k-1]}(i, j) \vee (P^{[k-1]}(i, k) \wedge P^{[k-1]}(k, j))$

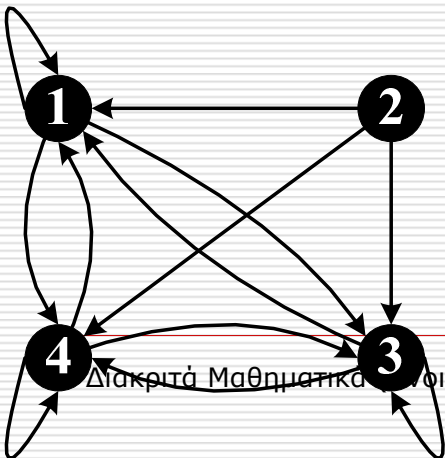
Αλγόριθμος Warshall

- $P^{[k]} = \{(i, j) : \exists i - j \text{ διαδρομή με εσωτερικές κορυφές } \in [k]\}$
- $P^{[0]} = R$ και $P^{[k]}(i, j) = P^{[k-1]}(i, j) \vee (P^{[k-1]}(i, k) \wedge P^{[k-1]}(k, j))$
 - Ισχύει ότι $R^* = P^{[n]}$.



$$P^{[0]} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{[1]} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$P^{[3]} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{[4]} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Αλγόριθμος Warshall

- $P^{[k]} = \{(i, j): \exists i - j \text{ διαδρομή με εσωτερικές κορυφές } \in [k]\}$
- $P^{[0]} = R$ και $P^{[k]}(i, j) = P^{[k-1]}(i, j) \vee (P^{[k-1]}(i, k) \wedge P^{[k-1]}(k, j))$
- Για R^* υπολογίζουμε n πίνακες $P^{[1]}, P^{[2]}, \dots, P^{[n]} = R^*$.
 - Πίνακας $P^{[k]}$ υπολογίζεται από $P^{[k-1]}$ σε χρόνο $O(n^2)$.
 - Χρόνος: $O(n^3)$. Υλοποίηση: τετριμμένη!
- Αλγόριθμος Floyd-Warshall:
 - Υπολογισμός **συντομότερων μονοπατιών** μεταξύ όλων των κορυφών.