Έστω $S_n = \{1,2,...,n\}$, και έστω $P(S_n)$ το δυναμοσύνολό του. Για κάθε φυσικό m, $0 \le m \le n$, συμβολίζουμε με E_m το υποσύνολο του $P(S_n)$ που αποτελείται από τα υποσύνολα του S_n με πληθικό αριθμό m. Θεωρούμε πρωτοβάθμια γλώσσα με διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q την οποία ερμηνεύουμε στο $P(S_n)$ με το $Q(x, y)$ να αληθεύει ανν $x \subseteq y$ (δεν υπάρχει στη γλώσσα μας άλλο κατηγορηματικό σύμβολο, συναρτησιακό σύμβολο ή σύμβολο σταθεράς). Σε αυτή την ερμηνεία, να διατυπώσετε:

1. Τύπο $\varphi_1(x)$ που αληθεύει ανν $x \notin E_0$
2. Τύπο $\varphi_2(x)$ που αληθεύει ανν $x \in E_{n-1}$

Το E_0 περιλαμβάνει μόνο το κενό σύνολο. Άρα ο $\varphi_1(x)$ αληθεύει ανν το x δεν είναι το κενό σύνολο. Ποιά ιδιότητα έχει το κενό σύνολο αναφορικά με το κατηγόρημα Q; Δεν έχει κανένα υποσύνολο εκτός από το κενό. Άρα αρκεί το x να έχει υποσύνολο διάφορο του εαυτού του.

$$\varphi_1(x) \equiv \exists y((x \neq y) \wedge Q(y, x))$$

Τα σύνολα με πληθικό αριθμό $n-1$ έχουν την ιδιότητα (αναφορικά με το κατηγόρημα υποσύνολο) να έχουν μόνο ένα γνήσιο υπερσύνολο το S_n.

$$\varphi_2(x) \equiv \exists y[x \neq y \wedge Q(x, y) \wedge \forall z(Q(x, z) \rightarrow (x = z \vee y = z))]$$

3. Τύπο $\varphi_3(x)$ που αληθεύει ανν το x έχει τουλάχιστον 2 γνήσια υποσύνολα στο $P(S_n)$
4. Τύπο $\varphi_4(x)$ που αληθεύει ανν το x έχει ακριβώς 2 υποσύνολα στο $P(S_n)$
5. Τύπο $\varphi_5(x, y)$ που αληθεύει ανν τα x και y αποτελούν μία διαμέριση του S_n

Το x πρέπει να έχει δύο διαφορετικά υποσύνολα πέρα από τον εαυτό του

$$\varphi_3(x) \equiv \exists y \exists z [y \neq z \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge Q(y, x) \wedge Q(z, x)]$$

$$\varphi_4(x) \equiv \exists y \exists z [y \neq z \wedge Q(y, x) \wedge Q(z, x) \wedge \forall w (Q(w, x) \rightarrow (w = y \vee w = z))]$$

Για να αποτελούν διαμέριση θα πρέπει και τα δύο να είναι διάφορα του κενού (γι΄αυτό χρησιμοποιούμε τον $\varphi_1(x)$) και κάθε στοιχείο του E_1 (μονοσύνολα) να είναι υποσύνολο του ενός ή του άλλου. Ορίζουμε τον τύπο $\psi(z)$ που είναι αληθής ανν το z είναι μονοσύνολο. Και στη συνέχεια γράφουμε τον τύπο $\varphi_5(x, y)$ που δηλώνει πως τα x, y αποτελούν διαμέριση.

$$\psi(z) \equiv \exists w [w \neq z \wedge Q(w, z) \wedge \forall \upsilon (Q(\upsilon, z) \rightarrow (\upsilon = z \vee \upsilon = w))]$$

$$\varphi_5(x, y) \equiv \varphi_1(x) \wedge \varphi_1(y) \wedge \forall z [\psi(z) \rightarrow (Q(z, x) \leftrightarrow \neg Q(z, y))]$$

6. Τύπο $\varphi_6(x, y, z)$ που αληθεύει ανν το σύνολο x αποτελεί την ένωση των συνόλων y και z
7. Πρόταση που δηλώνει την ύπαρξη μοναδικού συνόλου που είναι υπερσύνολο όλων των συνόλων στο $P(S_n)$

Αρκεί το x να είναι το μικρότερο δυνατό υπερσύνολο και των δύο συνόλων.

$$\varphi_6(x, y, z) \equiv Q(y, x) \wedge Q(z, x) \wedge \forall w(Q(y, w) \wedge Q(z, w) \rightarrow Q(x, w))$$

Το x πρέπει να είναι υπερσύνολο όλων και κάθε άλλο υπερσύνολο όλων να είναι ίσο με το x

$$\exists x[\forall y Q(y, x) \wedge \forall z(\forall y Q(y, z) \rightarrow x = z)]$$