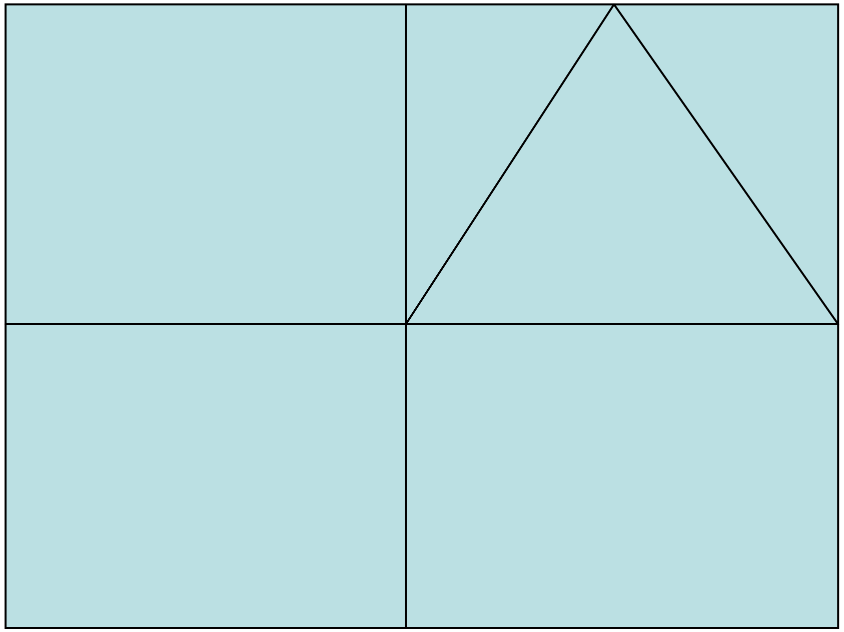
Δοθέντων 9 σημείων μέσα σε ένα μοναδιαίο τετράγωνο, να δειχθεί πως τρία από αυτά σχηματίζουν τρίγωνο το εμβαδόν του οποίου δεν ξεπερνά το 1/8. (Αρχή του Περιστερώνα)



"Περιστέρια" τα 9 σημεία. "Φωλιές" τα 4 τετράγωνα. Εφόσσον τα σημεία είναι 9 θα υπάρχει τουλάχιστον ένα τετράγωνο από τα 4 στα οποία χώρισα το αρχικό που θα περιέχει 3 σημεία. Το μεγαλύτερο τρίγωνο που μπορώ να φτιάξω σε αυτό το τετράγωνο είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα το εμβαδόν του οποίου είναι 1/2(1/2 * 1/2)=1/8

Έστω m ένας θετικός ακέραιος. Δείξτε ότι ανάμεσα σε 2m+1 διακριτούς ακέραιους απόλυτης τιμής μικρότερης ή ίσης του 2m-1 υπάρχουν τουλάχιστον 3 των οποίων το άθροισμα ισούται με 0.

"Φωλιές" οι 2m τιμές, " Περιστέρια " οι (2m+1) αριθμοί

Αν επιλέξω το 0 στους αριθμούς θα έχω (2m-1) φωλιές και 2m περιστέρια.
Επομένως σε κάποια φωλιά θα υπάρχει θετικός και αρνητικός αριθμός με την ίδια απόλυτη τιμή.

Αν δεν επιλέξω το 0 θα έχω (2m-1) φωλιές και (2m+1) περιστέρια.
Επομένως σε δύο φωλιές θα έχω θετικό και αρνητικό αριθμό με την ίδια απόλυτη τιμή.

Να δείξετε ότι ανάμεσα σε $n+2$ αυθαίρετα επιλεγμένους ακεραίους, είτε υπάρχουν δύο που η διαφορά τους διαιρείται από το $2n$ είτε υπάρχουν δύο που το άθροισμά τους διαιρείται από το $2n$.

"Φωλιές" τα $n+1$ ζεύγη φυσικών $\{i, 2n-i\}$, $i = 0,1,2, \ldots, n$

"Περιστέρια" τους $n+2$ ακεραίους στους οποίους αναφέρεται η εκφώνηση.

Κάθε περιστέρι x ανατίθεται στη φωλιά $\{i, 2n-i\}$ ανν είτε $x \bmod 2n = i$ είτε $x \bmod 2n = 2n - i$.

Θα υπάρχει τουλάχιστον μία φωλιά που θα δέχεται δύο περιστέρια. Έστω τα περιστέρια x και y.

Έστω $x \geq y$ και $x \bmod 2n = i$. Για το y θα έχω είτε $y \bmod 2n = i$ είτε $y \bmod 2n = 2n - i$. Στη μία περίπτωση διαιρείται το $x - y$ με το $2i$ και στη δεύτερη το $x + y$.

Έστω $S=\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$ σύνολο $n\geq 2$ φυσικών αριθμών. Θεωρούμε ότι για κάθε $a_i \in S$, $1\leq a_i \leq \frac{(2^n-1)}{n}$. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικά υποσύνολα του S με το ίδιο άθροισμα στοιχείων.

Όλα τα υποσύνολα είναι 2^n. Το μεγαλύτερο υποσύνολο έχει άθροισμα στοιχείων το πολύ 2^n-1. Περιστέρια τα υποσύνολα. Φωλιές οι τιμές των αθροισμάτων.

Έστω n αυθαίρετα επιλεγμένοι ακέραιοι $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Να δείξετε ότι υπάρχουν φυσικοί l, k, $1 \le l \le n$, $0 \le k \le n - l$, τέτοιοι ώστε το άθροισμα $a_l + a_{l+1} + \ldots + a_{l+k}$ να διαιρείται από το n.

"Φωλιές" οι n φυσικοί αριθμοί $i = 0,1,2,3,\ldots, n-1$.

"Περιστέρια" τα n μερικά αθροίσματα $S_k = \Sigma_{\iota=1}^{k} a_\iota$, $k = 1,2,\ldots, n$.

Κάθε "περιστέρι" S_k πηγαίνει στη "φωλιά" i ανν $S_k \bmod n = i$

Αν υπάρχει περιστέρι στη "φωλιά" 0 η συνθήκη ικανοποιείται.

Αν όχι τότε έχουμε τη "φωλιά" 0 κενή και $n-1$ "φωλιές",

n "περιστέρια"

Επομένως $\exists$ S_k, S_l στην ίδια φωλιά. $S_k - S_l = \alpha_k + a_{k+1} + \ldots + a_l$ πολλαπλάσιο του n.