Ένα άρθρο σε ένα περιοδικό τένις γράφει: «Αν δεν παίζω τένις, βλέπω τένις. Αν δεν βλέπω τένις διαβάζω για το τένις». Υποθέτουμε πως ο αρθρογράφος λέει την αλήθεια, και ότι δεν μπορεί να κάνει παραπάνω από μία από αυτές τις δραστηριότητες. Τι κάνει ο αρθρογράφος;

- P : παίζει τένις
- V : βλέπει τένις
- R : διαβάζει για το τένις
- Οι δύο προτάσεις είναι ψευδείς και η μία αληθής
- Οι συνεπαγωγές επίσης
  - $\neg P \rightarrow V$ και
  - $\neg V \rightarrow R$ είναι αληθείς
- Έστω P αληθής. Τότε V και R ψευδείς
- Η πρώτη συνεπαγωγή είναι αληθής και η δεύτερη ψευδής (άτοπο)
- Έστω R αληθής. Τότε P και V ψευδείς
- Η δεύτερη συνεπαγωγή είναι αληθής και η πρώτη ψευδής (άτοπο)
- Έστω V αληθής. Τότε P και R ψευδείς
- Και οι δύο συνεπαγωγές είναι αληθείς
- V : βλέπει τένις αληθής

Στο βάθος ενός παλιού ντουλαπιού υπάρχει κάποιο σημείωμα υπογεγραμμένο από έναν πειρατή ο οποίος είναι γνωστός για το εκκεντρικό του χιούμορ και την αγάπη του για τους γρίφους της λογικής. Στο σημείωμα γράφει πως κάπου στο σπίτι έχει κρύψει έναν θησαυρό. Έχει γράψει πέντε αληθείς προτάσεις και προκαλεί τον αναγνώστη να τις χρησιμοποιήσει προκειμένου να εντοπίσει το σημείο που βρίσκεται ο θησαυρός. (α) Αν το σπίτι βρίσκεται δίπλα σε λίμνη, τότε ο θησαυρός δεν είναι στην κουζίνα. (β) Αν το δέντρο στην μπροστινή αυλή είναι φτελιά τότε ο θησαυρός είναι στην κουζίνα.(γ) Το σπίτι βρίσκεται δίπλα στη λίμνη. (δ) Το δέντρο στη μπροστινή αυλή είναι φτελιά ή ο θησαυρός είναι θαμμένος κάτω από τον ιστό της σημαίας. (ε) Αν το δέντρο στην πίσω αυλή είναι βελανιδιά, τότε ο θησαυρός είναι στο γκαράζ.

- P : το σπίτι βρίσκεται δίπλα σε λίμνη
- Q : ο θησαυρός είναι στην κουζίνα
- R : το δέντρο στη μπροστινή αυλή είναι φτελιά
- T : ο θησαυρός είναι θαμμένος κάτω από τον ιστό της σημαίας
- U : το δέντρο στην πίσω αυλή είναι βελανιδιά
- V : ο θησαυρός είναι στο γκαράζ
- $P \rightarrow \neg Q$, $R \rightarrow Q$, $P$, $R \vee T$, $U \rightarrow V$ αληθείς
- P αληθής άρα ¬Q αληθής άρα Q ψευδής άρα R ψευδής άρα T αληθής
- T : ο θησαυρός είναι θαμμένος κάτω από τον ιστό της σημαίας

**Θέμα 1 (Προτασιακή Λογική, 2 μονάδες).** (α) Σε ένα απομονωμένο νησί υπάρχουν μόνο δύο κοινωνικές τάξεις: οι ευγενείς, που λένε πάντα την αλήθεια, και οι ψευτοευγενείς, που λένε πάντα ψέματα. Δύο κάτοικοι του νησιού, ο $X$ και ο $Y$ δηλώνουν: ο $X$ ότι "ο $Y$ είναι ευγενής", και ο $Y$ ότι "δεν ανήκω στην ίδια τάξη με τον $X$". Είναι κάποιος από τους $X$ και $Y$ ευγενής, και αν ναι, ποιος;

- p : ο X είναι ευγενής
- q : ο Y είναι ευγενής
- r : ο X λέει αλήθεια
- s : ο Y λέει αλήθεια
- w : ο Y δεν ανήκει στην ίδια τάξη με τον X
- Ισχύουν οι ισοδυναμίες $p \leftrightarrow r$, $q \leftrightarrow s$, και η συνεπαγωγή $r \rightarrow q$
- $w = (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$, $s \rightarrow w$
- Έστω X ευγενής τότε p = True άρα r = True άρα q = True και s = True.
- Επομένως w = True αλλά από την αποτίμηση έχω w = False άτοπο
- Έστω Y ευγενής τότε q = True άρα s = True άρα w = True.
- Αλλά $w = (\text{True} \wedge \neg p) \vee (p \wedge \text{False})$ άρα p=False άρα r=False άρα q=False
- Κανένας δεν είναι ευγενής

(β) Ένας εξερευνητής συλλαμβάνεται από μια φυλή κανιβάλων. Στη φυλή υπάρχουν δύο κατηγορίες κανιβάλων, αυτοί που λένε πάντα την αλήθεια και αυτοί που λένε πάντα ψέματα. Ο εξερευνητής θα μείνει ελεύθερος μόνο αν διαπιστώσει σε ποιά κατηγορία ανήκει ο φύλαρχος. Ο εξερευνητής μπορεί να κάνει μία μόνο ερώτηση στον φύλαρχο, την οποία αυτός θα απαντήσει με ένα "ναι" ή ένα "όχι". (i) Να εξηγήσετε γιατί η ερώτηση "Είσαι ειλικρινής;" δεν εξυπηρετεί τον σκοπό του εξερευνητή. (ii) Να βρείτε ερώτηση με την οποία ο εξερευνητής διαπιστώνει αν ο φύλαρχος είναι ειλικρινής.

- Αν ο φύλαρχος είναι ειλικρινής θα απαντήσει ναι
- Αν ο φύλαρχος είναι ψεύτης θα απαντήσει πάλι ναι
- Ερωτήσεις του τύπου είσαι φύλαρχος; θα δώσουν τη λύση

(γ) Μια συγκεκριμένη χώρα κατοικείται μόνο από ανθρώπους που είτε λένε πάντα αλήθεια είτε λένε πάντα ψέματα, και απαντούν σε ερωτήσεις μόνο με ένα "ναι" ή ένα "όχι". Ένας τουρίστας φθάνει σε μια διακλάδωση του δρόμου, όπου το ένα παρακλάδι οδηγεί στην πρωτεύουσα και το άλλο όχι. Δεν υπάρχει πινακίδα που να υποδεικνύει ποιο παρακλάδι να ακολουθήσει, αλλά υπάρχει ένας κάτοικος, ο κύριος Ζ, ο οποίος στέκεται στη διακλάδωση. Ποια ερώτηση πρέπει να κάνει ο τουρίστας στον κύριο Ζ για να αποφασίσει ποιο παρακλάδι πρέπει να ακολουθήσει;

p : ο κύριος Ζ λέει την αλήθεια

q : το αριστερό παρακλάδι οδηγεί στην πρωτεύουσα

Δημιουργούμε προτασιακό τύπο φ με τις p και q έτσι ώστε η απάντηση του κυρίου Ζ στην ερώτηση «είναι ο φ αληθής» να είναι ναι ανν η q είναι αληθής

Αν p=True τότε φ ίδια τιμή αληθείας με την q (εφόσσον ο Ζ λέει αλήθεια η απάντησή του θα ταυτίζεται με την αληθοτιμή της q)

Αν p=False τότε φ ίδια τιμή αληθείας με την ¬q (εφόσσον ο Ζ λέει ψέματα η απάντησή του θα ταυτίζεται με την αληθοτιμή της q).

Επομένως φ ταυτίζεται με την ισοδυναμία $p \leftrightarrow q$

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

**Τυπικές αποδείξεις**
**$\{\varphi \to (\chi \to \psi), \varphi \to \chi\} \vdash \varphi \to \psi$**

ΑΣ1 $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
ΑΣ2 $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
ΑΣ3 $(\neg \varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$

Υπόθεση (1) $\varphi \to (\chi \to \psi)$
Υπόθεση (2) $\varphi \to \chi$
Από ΑΣ2 αν βάλω όπου $\chi$ το $\psi$ και όπου $\psi$ το $\chi$ παίρνω
(3) $(\varphi \to (\chi \to \psi)) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi))$
(1), (3) και MP παίρνω (4) $((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi))$
Από (2), (4) και MP παίρνω $\varphi \to \psi$

**Τυπικές αποδείξεις**

**$\vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$**

ΑΣ1 $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

ΑΣ2 $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

ΑΣ3 $(\neg \varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$

Από ΑΣ3 αν βάλω όπου ψ το φ παίρνω

(1) $(\neg \varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$

Από σελίδα 20 των διαφανειών της προτασιακής λογικής έχω $\vdash \varphi \rightarrow\varphi$

άρα και $( \neg \varphi \rightarrow \neg\varphi)$ (2)

Από (1) και (2) και MP έχω $(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$

**Τυπικές αποδείξεις**

**$\{\neg\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \neg\psi), \neg\varphi \rightarrow \chi, \neg\varphi \rightarrow \psi\} \vdash \varphi$**

ΑΣ1 $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

ΑΣ2 $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

ΑΣ3 $(\neg \varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$

Υπόθεση (1) $\neg\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \neg\psi)$

Υπόθεση (2) $\neg\varphi \rightarrow \chi$

Υπόθεση (3) $\neg\varphi \rightarrow \psi$

Από ΑΣ3 έχω

$(\neg \varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$ (4)

Πρέπει να βρώ το $(\neg \varphi \rightarrow \neg\psi)$

Από ΑΣ2 και όπου φ το ¬φ, όπου χ το ¬ψ και όπου ψ το χ παίρνω

$(\neg\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \neg\psi)) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi))$ (5)

Το $\neg\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \neg\psi)$ δίνεται (υπόθεση 1) άρα από (1), (5) και MP έχω

$(\neg\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$ (6)

Το $\neg\varphi \rightarrow \chi$ δίνεται (υπόθεση 2) άρα από (2), (6) και MP έχω

$\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$ (7)

Από (4),(7) και MP έχω (8) $(\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$

Το $(\neg\varphi \rightarrow \psi)$ δίνεται (υπόθεση 3) άρα από (3), (8) και MP έχω φ