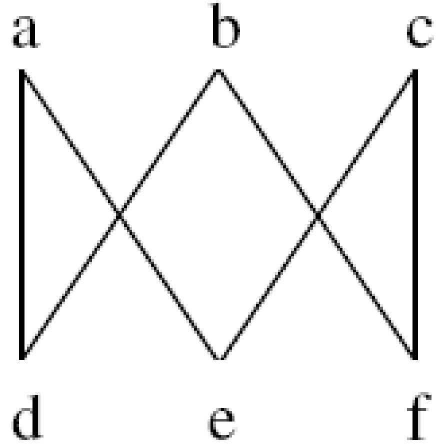
(α)Να σχεδιάσετε διάγραμμα Hasse ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου το οποίο έχει 3 minimal και 3 maximal στοιχεία, και κάθε στοιχείο του είναι είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο από (ακριβώς) δύο άλλα στοιχεία.

(β)Να βρείτε μια τοπολογική διάταξη για τη σχέση “υποσύνολο” στο $P(\{a,b,c,d\})$.

(γ)Έστω R μια σχέση μερικής διάταξης. Να δείξετε ότι η αντίστροφη σχέση R^{-1} είναι επίσης σχέση μερικής διάταξη



Τοπολογική Διάταξη
({},{a}, {b}, {c}, {d}, {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}, {a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,d}, {b,c,d}, {a,b,c,d}).

Η R είναι σχέση μερικής διάταξης άρα ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική.
Πρέπει να δείξουμε ότι η R^{-1} είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

Ανακλαστικότητα: $\forall a((a,a)\in R) \rightarrow \forall a((a,a)\in R^{-1})$

Αντισυμμετρικότητα: Έστω $(a,b),(b,a)\in R^{-1}$. Τότε $(b,a),(a,b)\in R$, οπότε λόγω αντισυμμετρικότητας της R είναι a=b.

Μεταβατικότητα: Έστω $(a,b),(b,c)\in R^{-1}$. Τότε $(c,b),(b,a)\in R$ οπότε από

μεταβατικότητα της R είναι $(c,a)\in R$ και $(a,c)\in R^{-1}$

(δ)Να δείξετε ότι η μεταβατική κλειστότητα της συμμετρικής κλειστότητας της ανακλαστικής κλειστότητας μιας σχέσης R είναι μία σχέση ισοδυναμίας. Αληθεύει ότι η συμμετρική κλειστότητα της μεταβατικής κλειστότητας της ανακλαστικής κλειστότητας οποιασδήποτε σχέσης R είναι σχέση ισοδυναμίας;

Μια σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας αν είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.
Έστω R τυχαία σχέση σε σύνολο S, R_α η ανακλαστική κλειστότητα της R, R_σ η συμμετρική κλειστότητα της R_α και R_μ η μεταβατική κλειστότητα της R_σ. Θέλουμε να δείξουμε πως η R_μ είναι σχέση ισοδυναμίας.
Μεταβατική είναι εφόσσον πρόκειται για σχέση μεταβατικής κλειστότητας μιας σχέσης.
Ανακλαστική είναι γιατί όλα τα στοιχεία είχαν ανακύκλωση λόγω ανακλαστικής κλειστότητας και δεν προστέθηκαν νέα στοιχεία.
Συμμετρική είναι γιατί είχα συμμετρική κλειστότητα και στη συνέχεια για να φτιάξω τη σχέση μεταβατικής κλειστότητας προσέθεσα $\forall (a,a_1),(a_1,a_2)...(a_n,b) \in R_\sigma$ το (a,b) αλλά το (b,a) θα υπάρχει επίσης στην R_μ δεδομένου ότι θα υπάρχουν και όλα τα $(a_1,a),(a_2,a_1)...(b,a_n)$ στην R_σ και κατά συνέπεια και το (b,a) θα υπάρχει στην R_μ.
Επομένως η R_μ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Η συμμετρική κλειστότητα της μεταβατικής κλειστότητας της ανακλαστικής κλειστότητας μιας σχέσης R δεν είναι πάντα σχέση ισοδυναμίας. Για παράδειγμα έστω η σχέση $\mathrm{R} = \{(\mathrm{a},\mathrm{b}),(\mathrm{c},\mathrm{b})\}$ στο σύνολο $\{\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c}\}$. Η ανακλαστική της κλειστότητα είναι η $\mathrm{R}_a = \{(\mathrm{a},\mathrm{a}),(\mathrm{b},\mathrm{b}),(\mathrm{c},\mathrm{c}),(\mathrm{a},\mathrm{b}),(\mathrm{c},\mathrm{b})\}$. Η μεταβατική κλειστότητα της R_a είναι η $R_\mu = R_\alpha$. Η συμμετρική κλειστότητα της R_μ είναι η

$\mathrm{R}_\sigma = \{(\mathrm{a},\mathrm{a}),(\mathrm{b},\mathrm{b}),(\mathrm{c},\mathrm{c}),(\mathrm{a},\mathrm{b}),(\mathrm{b},\mathrm{a}),(\mathrm{b},\mathrm{c}),(\mathrm{c},\mathrm{b})\}$, η οποία δεν είναι σχέση ισοδυναμίας αφού $(a,b),(b,c) \in R_\sigma$ ενώ $(b,c) \notin R_\sigma$.

Έστω ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο L από "επίπεδα ασφαλείας" (π.χ. $L = \{$ ελεύθερο, εμπιστευτικό, μυστικό, απόλυτα μυστικό$\}$) και έστω S το σύνολο θεμάτων που βρίσκονται στα κρατικά αρχεία. Ορίζουμε τη διμελή σχέση $\leq$ στο $L \times P(S)$ ως εξής: $(l_1, s_1) \leq (l_2, s_2)$ ανν το επίπεδο ασφαλείας l_1 δεν είναι ψηλότερο του επιπέδου ασφαλείας l_2 και $s_1 \subseteq s_2$. (i) Να δείξετε ότι η σχέση $\leq$ είναι σχέση μερικής διάταξης. (ii) Να δείξετε ότι το $(L \times P(S), \leq)$ είναι lattice.

(i)
1 Ανακλαστική: $(l, s) \leq (l, s)$ δεδομένου ότι $l \leq l$ και $s \subseteq s$
2 Αντισυμμετρική: Αν $(l_1, s_1) \leq (l_2, s_2)$ και $(l_2, s_2) \leq (l_1, s_1)$ τότε $l_1 = l_2$ και $s_2 = s_1$
3 Μεταβατική: Αν $(l_1, s_1) \leq (l_2, s_2)$ και $(l_2, s_2) \leq (l_3, s_3)$ τότε $l_1 \leq l_2, l_2 \leq l_3$ και έπεται πως $l_1 \leq l_3$. Ομοίως αν $s_1 \subseteq s_2, s_2 \subseteq s_3$ τότε $s_1 \subseteq s_3$. Άρα $(l_1, s_1) \leq (l_3, s_3)$
Άρα είναι σχέση μερικής διάταξης.

(ii)
Αρκεί να δείξουμε πως κάθε ζεύγος στοιχείων έχει ελάχιστο άνω φράγμα και μέγιστο κάτω φράγμα. Ένα άνω φράγμα 2 στοιχείων είναι το $A = (\max(l_1, l_2), s_1 \cup s_2)$. Αυτό το φράγμα είναι ελάχιστο γιατί δεν μπορεί να υπάρξει l που να είναι μικρότερο του max των l_1, l_2 και ταυτόχρονα μεγαλύτερο και από τα δύο και το ίδιο ισχύει και για το $s_1 \cup s_2$. Αντίστοιχα το μέγιστο κάτω φράγμα θα είναι $B = (\min(l_1, l_2), s_1 \cap s_2)$.