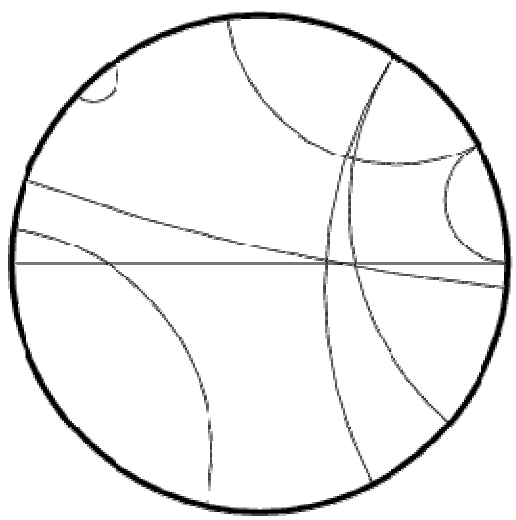
Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Η Λογική της Γεωμετρίας

Η αποκρισιμότητα της

Elementary Geometry

Για τους σκοπούς της παρουσίασης της 25/01/2011.



Αριστοτέλης Παναγιωτόπουλος

Ναταλία Κωτσάνη

Ευκλείδης – «Στοιχεία» (300 π.Χ)

Αξιώματα

A_1. *Από κάθε δύο σημεία μπορούμε να φέρουμε ευθεία γραμμή.*

A_2. *Ένα ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να προεκτείνεται συνεχώς και ευθύγραμμα.*

A_3. *Με οποιοδήποτε σημείο ως κέντρο και με οποιαδήποτε ακτίνα μπορεί να γραφεί κύκλος.*

A_4. *Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.*

A_5. *Αν μια ευθεία γραμμή τέμνει δυο άλλες ευθείες γραμμές έτσι ώστε οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται να έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε, όταν οι δύο ευθείες προεκταθούν απεριόριστα, θα συναντηθούν από εκείνο το μέρος όπου σχηματίζονται οι μικρότερες των δύο ορθών γωνίες.*

Κοινές έννοιες

1. *Πράγματα που είναι ίσα προς τρίτο είναι και μεταξύ τους ίσα.*

2. *Αν ίσα προστεθούν με ίσα, τότε το άθροισμα θα είναι ίσα.*

3. *Αν ίσα αφαιρεθούν από ίσα, τότε τα υπόλοιπα θα είναι ίσα.*

4. *Πράγματα που εφαρμόζουν το ένα πάνω στο άλλο, είναι ίσα μεταξύ τους.*

5. *Το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους.*

…

D. Hilbert - «Grundlagen der Geometrie» (1889)

I. Αξιώματα συνδέσεως

I_1. *Προς δύο σημεία A, B, υπάρχει πάντοτε μια ευθεία a, η οποία συνταιριάζεται με καθένα απ' αυτά τα σημεία.*

I_2. *Για κάθε δυο σημεία A, B δεν υπάρχουν περισσότερες από μία ευθείες που να συνταιριάζονται με καθένα από αυτά.*

I_3. *Επί μιας ευθείας υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία. Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία που δεν κείνται πάνω σε μια ευθεία.*

II. Αξιώματα διατάξεως

II_1. *Αν ένα σημείο B κείται μεταξύ δύο σημείων A και C, τότε τα A, B, C είναι τρία διαφορετικά σημεία μιας ευθείας και το B κείται μεταξύ επίσης των A και C.*

II_2. *Ως προς δύο σημεία A και C υπάρχει πάντοτε ένα τουλάχιστον σημείο B επί της ευθείας AC τέτοιο ώστε το C να κείται μεταξύ των A και B και ένα τουλάχιστον σημείο D τέτοιο ώστε το C να κείται μεταξύ των A και D.*

II_3. *Σ' ό,τι αφορά τρία οποιαδήποτε σημεία μιας ευθείας, ένα και μόνον ένα από αυτά κείται μεταξύ των δύο άλλων.*

II_4. *(Αξίωμα του Pasch) Ας είναι A, B, C τρία σημεία μη κείμενα σ' ευθεία γραμμή και a μια ευθεία στο επίπεδο A,B,C η οποία δε συναντά κανένα από τα σημεία A, B, C. Αν κατακολουθίαν η ευθεία a διέρχεται από ένα σημείο του τμήματος AB, τότε αυτή θα* *διέρχεται επίσης οπωσδήποτε από ένα σημείο του τμήματος AC ή από ένα σημείο του τμήματος BC.*

III. Αξιώματα ισότητας

III$_1$. *Αν A, B είναι δύο σημεία μιας ευθείας α και ακόμα A΄ ένα σημείο πάνω στην ίδια ή σε μιαν άλλη ευθεία α΄ τότε σε μια καθορισμένη μεριά της α΄ ως προς το A΄ μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα και μόνον ένα σημείο B΄, τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα AB να είναι ίσο με το A΄B΄.*

III$_2$. *Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα A΄B΄ και ένα τμήμα A˝B˝ είναι ίσα προς το αυτό τμήμα AB, τότε και το A΄B΄ είναι ίσο προς το τμήμα A˝B˝. Συντομότερα, αν δύο τμήματα είναι ίσα προς ένα τρίτο, τότε αυτά είναι και μεταξύ τους ίσα.*

III$_3$. *Έστω AB και BC δύο ευθύγραμμα τμήματα πάνω σε μιαν ευθεία α, χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία και ακόμα A΄B΄ και B΄C΄ δύο τμήματα πάνω στην ίδια ή σε άλλη ευθεία α΄, επίσης χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία· αν είναι AB ≡ A΄B΄ και BC ≡ B΄C΄, τότε θα είναι επίσης και AC ≡ A΄C΄.*

III$_4$. *Θεωρούμε γωνία ∠(h, k) κορυφής O και μια ευθεία α΄. Αν h΄ ημιευθεία της α΄ εκπορευόμενη από ένα σημείο O΄ επί της ευθείας τότε υπάρχει μία και μόνο μία ημιευθεία k΄ έτσι ώστε η γωνία ∠(h, k) να είναι ίση προς τη γωνία ∠(h΄, k΄). Συμβολικά γράφουμε ∠(h, k) ≡ ∠(h΄, k΄). Κάθε γωνία είναι ίση με τον εαυτό της, δηλαδή ∠(h, k) ≡ ∠(h, k) και ∠(h, k) ≡ ∠(k, h).*

III$_5$. *Αν σε δύο τρίγωνα ABC και A΄B΄C΄ ισχύουν οι ισότητες AB ≡ A΄B΄, AC ≡ A΄C΄ και ∠BAC ≡ ∠B΄A΄C΄ τότε θα εκπληρώνονται επίσης και οι ισότητες ∠ABC ≡ ∠A΄B΄C΄ και∠ACB ≡ ∠A΄C΄B΄.*

IV. Αξίωμα παραλληλίας (Ευκλείδιο Αξίωμα)

IV.(Αξίωμα Playfair)Αν α ευθεία και A ένα σημείο κείμενο εκτός της ευθείας α, τότε υπάρχει μια και μόνο μία ευθεία που διέρχεται από το A δεν τέμνει την α. Η ευθεία αυτή καλείται παράλληλη προς την α που διέρχεται από το A.

V. Αξιώματα συνέχειας

V$_1$. (Αρχιμήδειο αξίωμα) Αν AB και CD είναι δυο ευθύγραμμα τμήματα, τότε πάνω στην ευθεία AB υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος από σημεία A_1, A_2, A_3, .., $A_{ν-1}$, $A_ν$ τέτοια ώστε τα τμήματα AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{ν-1}A_ν$ να είναι ίσα προς το τμήμα CD και το σημείο B να κείται μεταξύ των $A_{ν-1}$ και $A_ν$.

V$_2$. (Αξίωμα πληρότητας) Τα σημεία μιας ευθείας α συγκροτούν ένα τέτοιο σύστημα, το οποίο με τη διατήρηση της γραμμικής διάταξης, του πρώτου αξιώματος ισότητας και του Αρχιμήδειου αξιώματος δεν είναι επιδεκτικό καμιάς περεταίρω επέκτασης· ισοδύναμα δεν είναι δυνατόν σ' αυτό το σύστημα από σημεία να επισυνάψουμε πάνω στην α και άλλα σημεία, έτσι ώστε στο με τη συνάρμοση παραγόμενο σύστημα να εκπληρώνονται όλα τα προαναφερθέντα αξιώματα.

A. Tarski - «What is elementary geometry» (1959)

A$_1$. *(Identity axiom for betweenness)*

$(\forall x)(\forall y)[\beta(x, y, x) \rightarrow (x = y)]$

A$_2$. *(Transitivity axiom for betweenness)*

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)\{[\beta(x, y, u) \wedge \beta(y, z, u)] \rightarrow \beta(x, y, z)\}$

A$_3$. *(Connectivity axiom for betweenness)*

$\boldsymbol{(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)\{[\beta(x, y, z) \wedge \beta(x, y, u) \wedge \sim(x = y)] \rightarrow [\beta(x, z, u) \vee \beta(x, u, z)]\}}$

A$_4$. *(Reflexivity axiom for equidistance)*

$(\forall x)(\forall y)\delta(x, y, y, x)$

A$_5$. *(Identity axiom for equidistance)*

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[\delta(x, y, z, z) \rightarrow (x = y)]$

A$_6$. *(Transitivity axiom for equidistance)*

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\forall v)(\forall w)\{[\delta(x, y, z, u) \wedge \delta(x, y, v, w)] \rightarrow \delta(z, u, v, w)\}$

A$_7$. *(Pasch's axiom)*

$(\forall t)(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\exists v)\{[\beta(x, t, u) \wedge \beta(y, u, z)] \rightarrow [\beta(x, v, y) \wedge \beta(z, t, v)]\}$

A$_8$. *(Euclid's axiom)*

$(\forall t)(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\exists v)(\exists w)\{[\beta(x, u, t) \wedge \beta(y, u, z) \wedge \sim(x = u)]$
$\rightarrow [\beta(x, z, v) \wedge \beta(x, y, w) \wedge \beta(v, t, w)]\}$

A$_9$. *(Five-segment axiom)*

$(\forall x)(\forall x')(\forall y)(\forall y')(\forall z)(\forall z')(\forall u)(\forall u')\{[\delta(x, y, x', y') \wedge \delta(y, z, y', z') \wedge \delta(x, u, x', u')$
$\wedge\, \delta(y, u, y', u') \wedge \beta(x, y, z) \wedge \beta(x', y', z') \wedge \sim(x = y)] \rightarrow \delta(z, u, z', u')\}$

A$_{10}$. *(Axiom of segment construction)*

$(\forall x)(\forall y)(\forall u)(\forall v)(\exists z)\{\beta(x, y, z) \wedge \delta(y, z, u, v)\}$

A$_{11}$. (*Lower dimension axiom)*

$(\exists x)(\exists y)(\exists z)[\sim\beta(x, y, z) \wedge \sim\beta(y, z, x) \wedge \sim\beta(z, x, y)]$

A$_{12}$. (*Upper dimension axiom)*

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\forall v)\{[\delta(x, u, x, v) \wedge \delta(y, u, y, v) \wedge \delta(z, u, z, v) \wedge \sim(u = v)]$
$\rightarrow [\beta(x, y, z) \vee \beta(y, z, x) \vee \beta(z, x, y)]\}$

A$_{13}$. (Elementary continuity axioms)

$(\forall u)(\forall w) \ldots (\forall k)\{(\exists z)(\forall x)(\forall y)[\varphi \wedge \psi \longrightarrow \beta(z, x, y)]$

$\rightarrow (\exists u)(\forall x)(\forall y)[\varphi \wedge \psi \rightarrow \beta(x, u, y)]\}$

Στη θέση της δευτεροβάθμιας πρότασης:

$$\forall X \forall Y\{(\exists z)(\forall x)(\forall y)[(x \in X) \wedge (y \in Y) \rightarrow \beta(z, x, y)]$$
$$\rightarrow (\exists u)(\forall x)(\forall y)[(x \in X) \wedge (y \in Y) \rightarrow \beta(x, u, y)]\}$$

Theory of Real Closed Fields

A. Tarski «A decision method for elementary algebra and geometry» (1948)

1. $\forall x \forall y \forall z [x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z]$
2. $\forall x \forall y \forall z [x + (y + z) = (x + y) + z]$
3. $\forall x \forall y \forall z [x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z]$
4. $\forall x \forall y [x + y = y + x]$
5. $\forall x \forall y [x \cdot y = y \cdot x]$
6. $\forall x [x + 0 = x \wedge x + (-x) = 0]$
7. $\forall x [x \cdot 1 = x]$
8. $\forall x [x \neq 0 \rightarrow \exists y (x \cdot y = 1)]$
9. $\forall x \exists y [y \cdot y = x]$
10. $q_n \equiv \forall a_0 \ldots \forall a_n \exists x [a_n \neq 0 \wedge a_0 + \ldots + a_n x^n = 0]$ for odd $n \in \mathbb{N}$