Αναζήτηση Κατά Βάθος

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

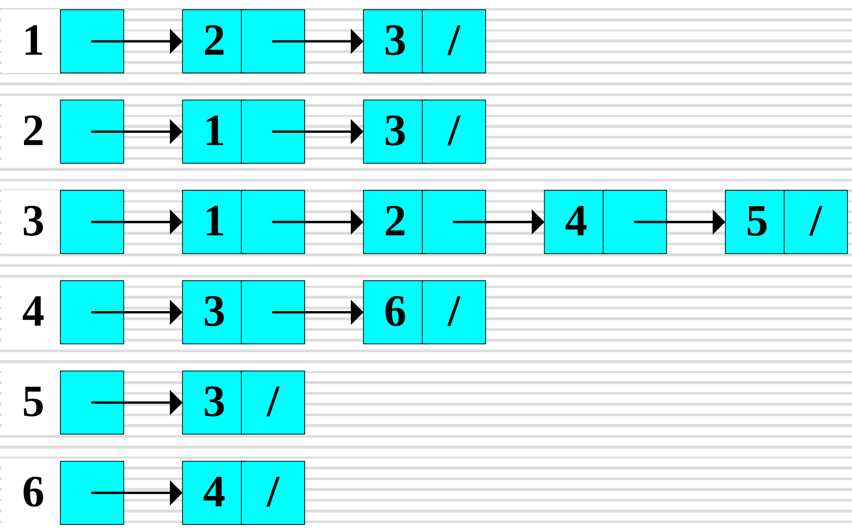
Συμπληρώσεις: Α. Παγουρτζής

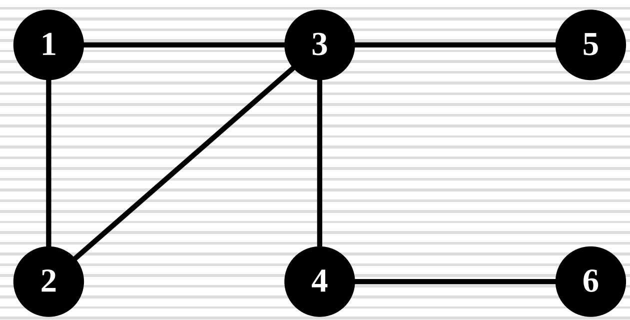
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αναζήτηση Κατά Βάθος (DFS)

- Εξερεύνηση νέων κορυφών με απομάκρυνση από αρχική.
- Πρώτη επίσκεψη σε ανεξερεύνητη κορυφή u:
  - Εξερεύνηση (αναδρομικά) όλων των (ανεξερεύνητων) γειτόνων της u, πριν ολοκληρώσουμε με u.





Αναζήτηση Κατά Βάθος (DFS)

- Εξερεύνηση νέων κορυφών με απομάκρυνση από αρχική.
- Πρώτη επίσκεψη σε ανεξερεύνητη κορυφή u:
  - Εξερεύνηση (αναδρομικά) όλων των (ανεξερεύνητων) γειτόνων της u, πριν ολοκληρώσουμε με u.
- Φύσει αναδρομική διαδικασία:

DFS(κορυφή u)
  for κάθε κορυφή v γειτονική της u **do**
    if δεν έχω επισκεφθεί τη v προηγουμένως **then**
      σημείωσε ακμή (u, v); DFS(v);

- **Τρία είδη** κορυφών:
  - Ανεξερεύνητη: όχι επίσκεψη ακόμη.
  - Υπο-εξέταση: επίσκεψη και εξερευνούμε γείτονες.
  - Εξερευνημένη: ολοκλήρωση διαδικασίας.

Αναζήτηση Κατά Βάθος (DFS)

- Κορυφές περνούν από παραπάνω στάδια:
  - Αρχικά όλες οι κορυφές ανεξερεύνητες.
  - Πρώτη επίσκεψη ανεξερεύνητης κορ. $\rightarrow$ υπό-εξέταση.
  - Ολοκλήρωση DFS για (ανεξερ.) γείτονες κορ. $\rightarrow$ εξερευνημένη.
- Κορυφή u τίθεται υπό-εξέταση:
  - Όλες οι κορυφές που είναι προσπελάσιμες από u και είναι ανεξερεύνητες θα τεθούν εξερευνημένες πριν u τεθεί εξερευνημένη.
- Εξέλιξη διαδικασίας αποτυπώνεται σε **DFS-δάσος** και **«χρόνους»** πρώτης επίσκεψης και αναχώρησης.
  - DFS-δάσος: ακμές πρώτης επίσκεψης, ακυκλικό.

Υλοποίηση

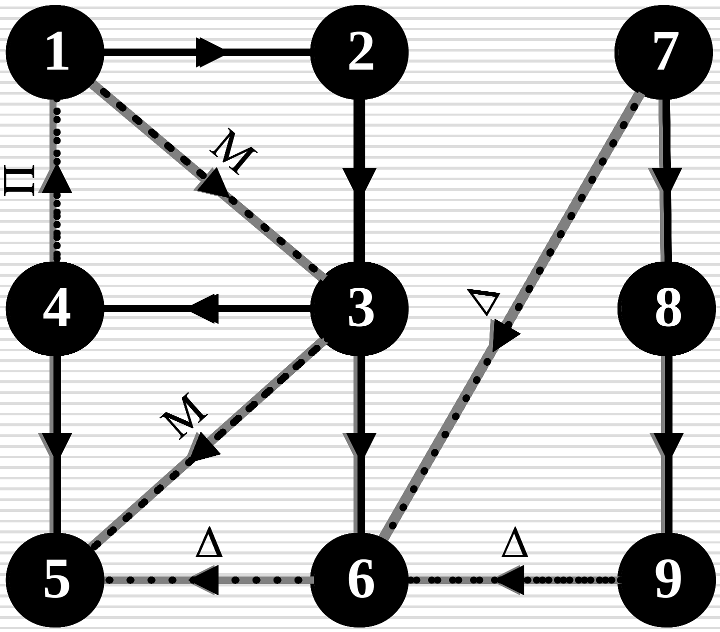
- Πίνακας κατάστασης: **m[v]** = { A, Y, E }.
- Πίνακας προγόνων: **p[v]** = πατέρας v στο DFS-δάσος.
- «Χρόνοι» πρώτης επίσκεψης **d[v]** και αναχώρησης **f[v]**.
- Χρόνος εκτέλεσης **Θ(n + m)**.
- DFS σε (α) δέντρο, (β) πλήρες γράφημα, (γ) κύκλο.

DFS_Init($G(V,E)$)
    $t \leftarrow 0$;
    for all $v \in V$ **do**
        $m[v] \leftarrow \mathrm{A}$; $p[v] \leftarrow \mathrm{NULL}$;
    for all $v \in V$ **do**
        if $m[v] = \mathrm{A}$ **then** DFS(v);

DFS(v)
    $m[v] \leftarrow \mathrm{Y}$; $d[v] \leftarrow {++t}$;
    for all $u \in L[v]$ **do**
        if $m[u] = \mathrm{A}$ **then**
            $p[u] \leftarrow v$; DFS(u);
    $m[v] \leftarrow \mathrm{E}$; $f[v] \leftarrow {++t}$;

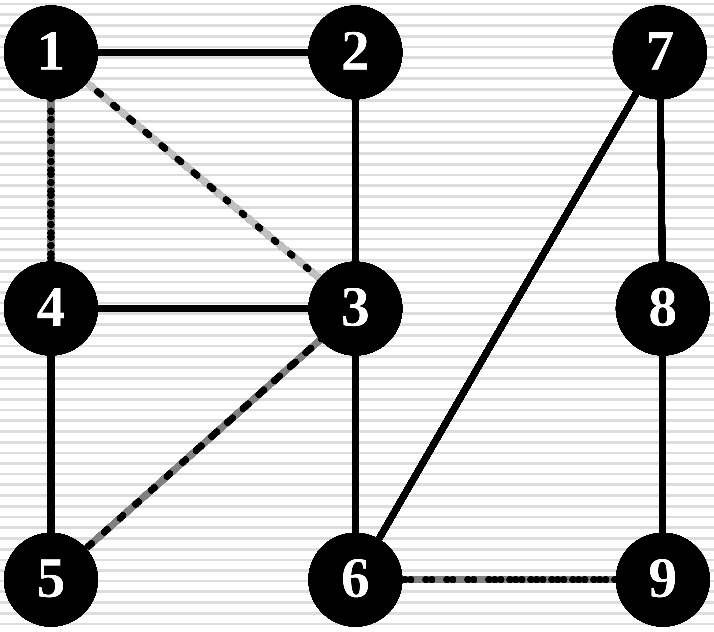
Παράδειγμα – Κατηγορίες Ακμών

- Ακμές δάσους / δέντρου:
  - Εξερεύνηση (u, v) όταν v ανεξερεύνητη.
- Πίσω ακμές:
  - Εξερεύνηση (u, v) όταν v υπό-εξέταση: κύκλος.
- Μπροστά ακμές:
  - Εξερεύνηση (u, v) όταν v εξερευνημένη και v απόγονος u στο δέντρο.
- Ακμές διασταύρωσης:
  - Εξερεύνηση (u, v) όταν v εξερευνημένη και v **όχι** απόγονος u στο δέντρο.



Παράδειγμα

- DFS σε μη-κατευθ. γράφημα παράγει μόνο ακμές δέντρου και πίσω ακμές.
  - Ακμή {v, u} με d[v] < d[u] (πρώτα πρώτη επίσκεψη σε v).
  - Πρώτα v ΥΕ, μετά u ΥΕ, μετά u Εξερ, τέλος v Εξερ.
  - Αν κατεύθυνση (v, u) εξερευνήθηκε πρώτη, τότε {v, u} ακμή δέντρου.
  - Αν κατεύθυνση (u, v) εξερευνήθηκε πρώτη, τότε {v, u} πίσω ακμή.



Μερικές Ιδιότητες

- Για μη-κατευθυνόμενα γραφήματα, DFS υπολογίζει συνεκτικές συνιστώσες (όπως και BFS).
- Αν v απόγονος u στο DFS-δάσος, $[d[v], f[v]] \subset [d[u], f[u]]$
  Αν v όχι απόγονος u στο DFS-δάσος, $[d[v], f[v]] \cap [d[u], f[u]] = \emptyset$
- Γράφημα ακυκλικό ανν DFS δεν παράγει πίσω ακμές.
  - Εξερεύνηση πίσω ακμής (u, v) όταν v ΥΕ $\Rightarrow$
    Μονοπάτι v $\rightarrow$ u και ακμή (u, v) $\Rightarrow$ κύκλος.
  - Έστω κύκλος C, v πρώτη κορυφή C που τίθεται ΥΕ,
    και (u, v) ακμή C που εισέρχεται στην v.
  - u απόγονος της v στο DFS-δάσος γιατί:
    - Υπάρχει v $\rightarrow$ u μονοπάτι.
    - Όλες οι άλλες κορυφές του C είναι Α όταν v γίνεται ΥΕ.
  - Άρα (u, v) πίσω ακμή.

Εφαρμογές

- «Χρόνοι» πρώτης επίσκεψης και αναχώρησης δίνουν πληροφορίες για δομή γραφήματος:
  - Τοπολογική διάταξη σε Directed Acyclic Graphs (DAGs).
  - Σημεία κοπής και γέφυρες σε μη-κατευθυνόμενα γραφήματα.
  - Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες σε κατευθυνόμενα γραφήματα.

Τοπολογική Διάταξη

- DAG (Directed Acyclic Graph) αντιστοιχεί σε σχέση μερικής διάταξης:
  - Ακμή (u, v) $\Leftrightarrow$ u ≤ v (δηλ. u «προηγείται» v).
  - Σειρά υπολογισμού αλγεβρικών εκφράσεων, π.χ.

$$(ac)x^2 + [(a+c)(b+d) - ac - bd]x + bd$$

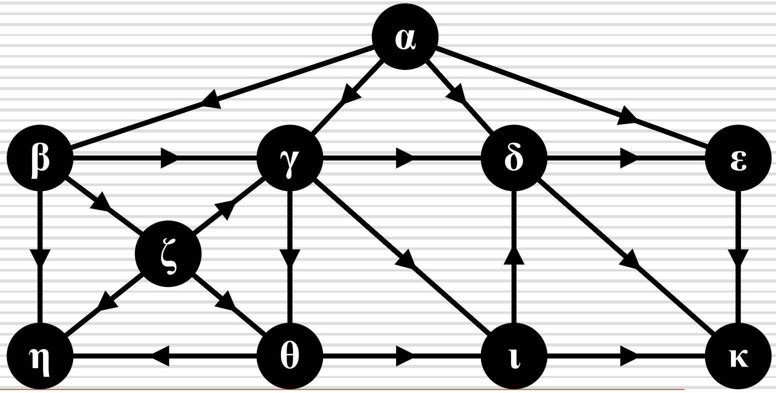
  - Προγραμματισμός εργασιών σε σύνθετα έργα.
- Ύπαρξη κύκλου δεν συνάδει με «διάταξη», έστω μερική.
- DFS ελέγχει για ύπαρξη κύκλων και υπολογίζει «σειρά» κορυφών **συμβατή** με μερική διάταξη του DAG.
  - Τοπολογική διάταξη.

Τοπολογική Διάταξη

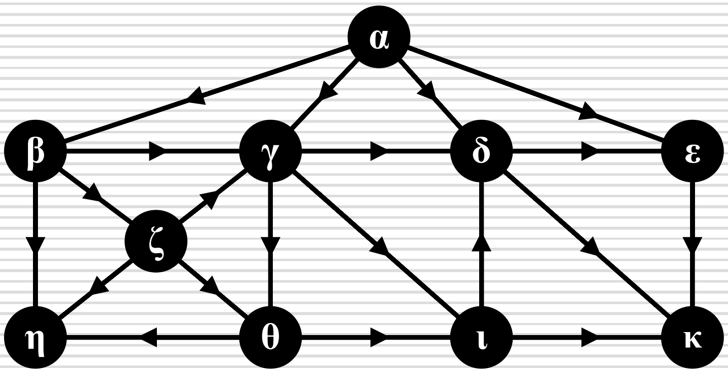
- ... μετάθεση π κορυφών κατευθυνόμενου G(V, E) ώστε

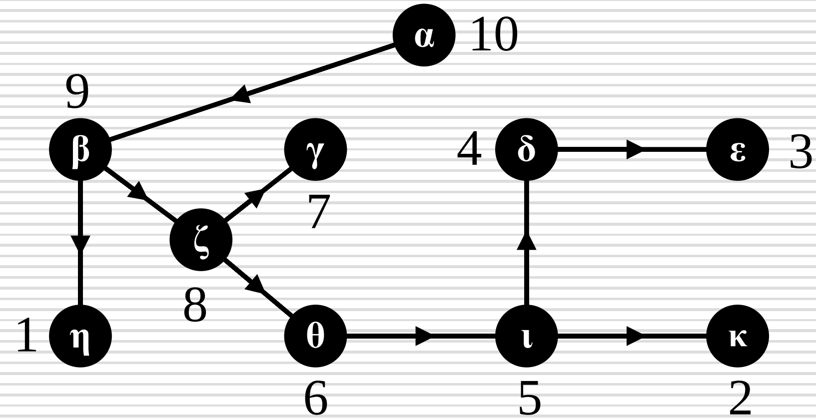
$$\forall (u,v) \in E\,,\ \pi(u) < \pi(v)$$

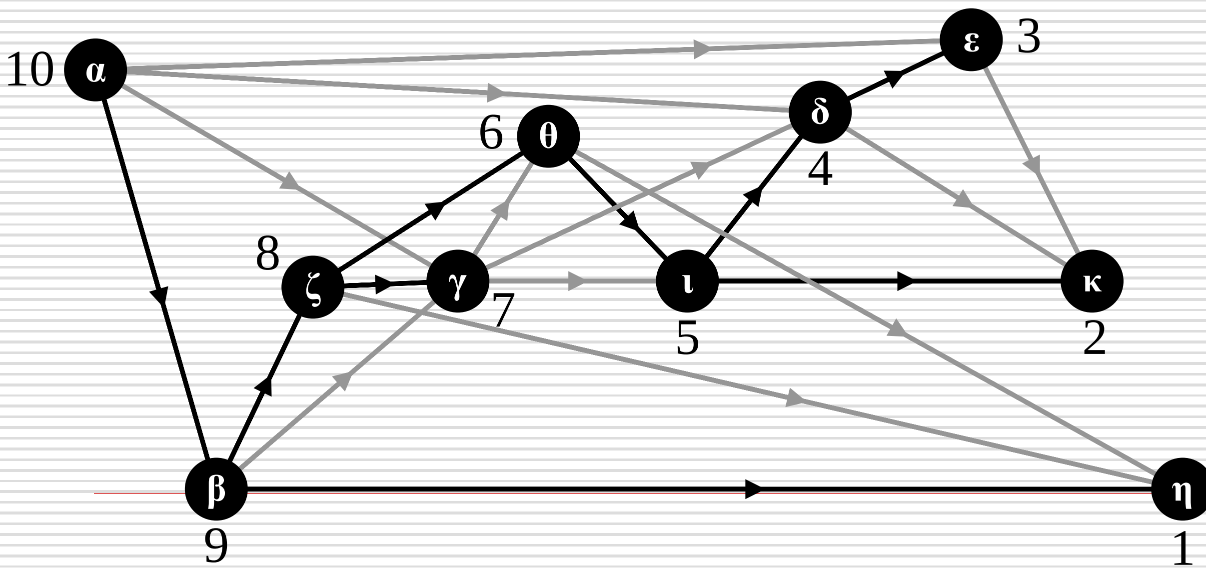
  - Δηλ. κορυφές σε ευθεία ώστε όλες οι ακμές να έχουν φορά από αριστερά προς τα δεξιά.
- Τοπολογική διάταξη ανν γράφημα ακυκλικό (DAG).
  - Κορυφές σε φθίνουσα σειρά χρόνων αναχώρησης του DFS, δηλ. $f[v_1] > f[v_2] > \cdots > f[v_n]$
  - Υλοποίηση με στοίβα: Εξερευνημένη κορυφή μπαίνει στην ουρά.
  - Σειρά στην ουρά αντιστοιχεί σε τοπολογική διάταξη.
  - Χρόνος Θ(n+m).



Παράδειγμα

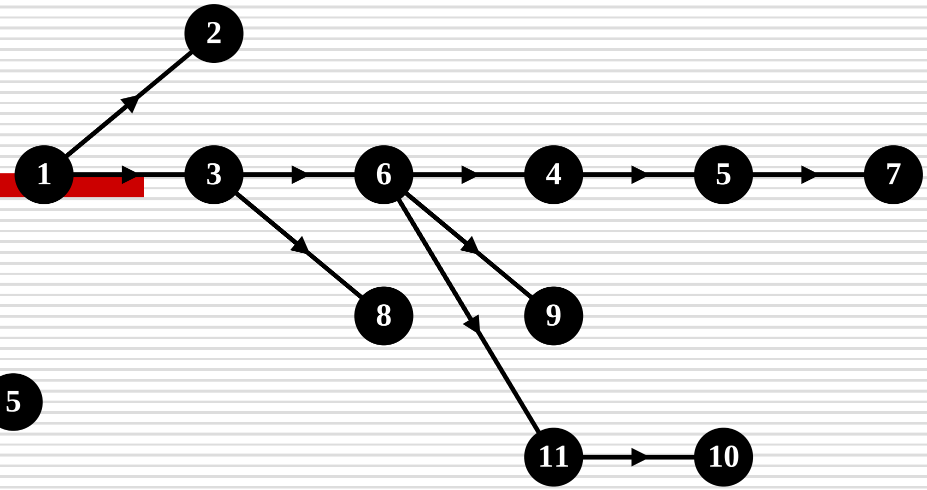


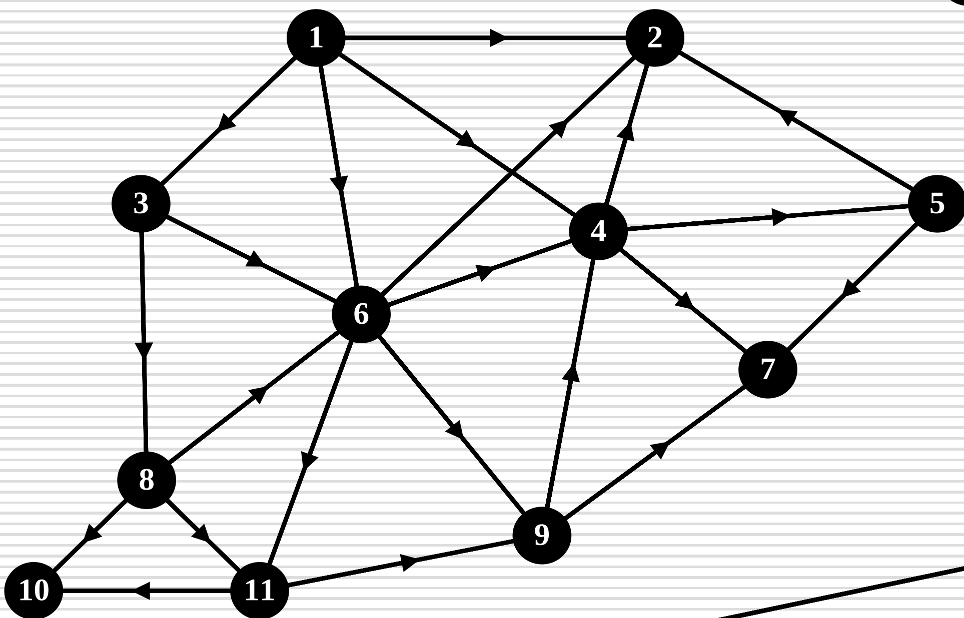


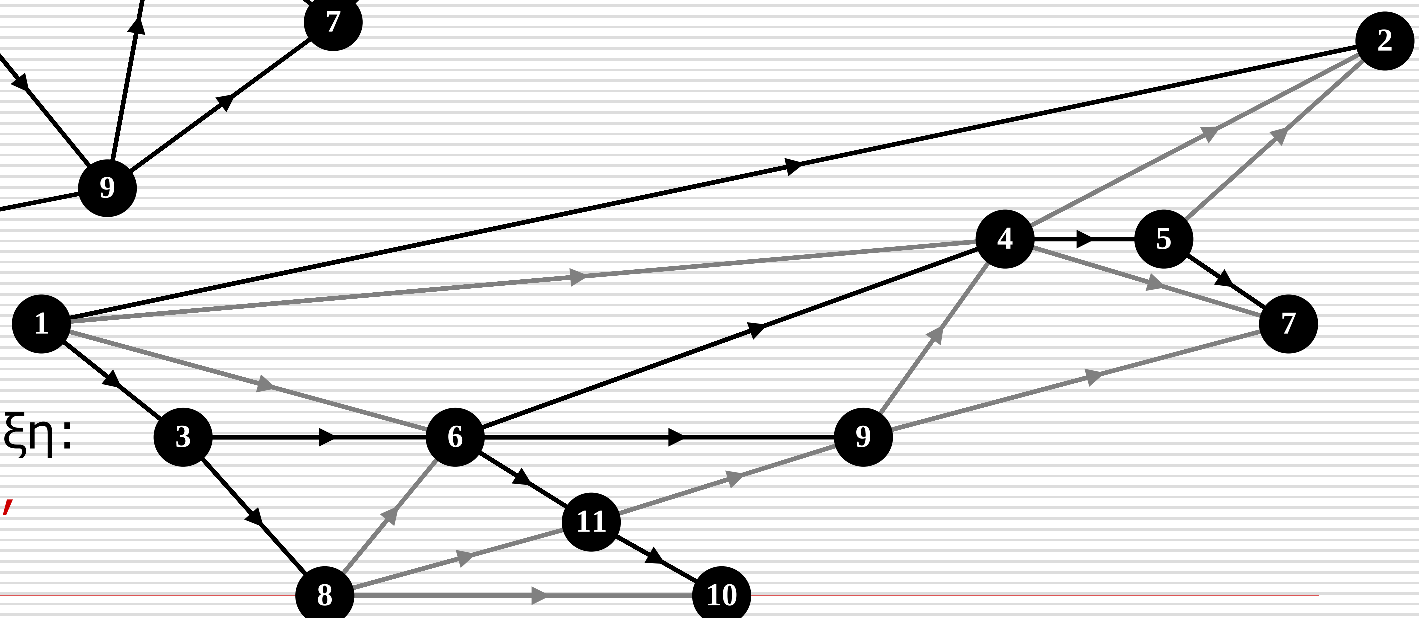


Τοπολογική διάταξη:
α, β, ζ, γ, θ, ι, δ, ε, κ, η

Παράδειγμα







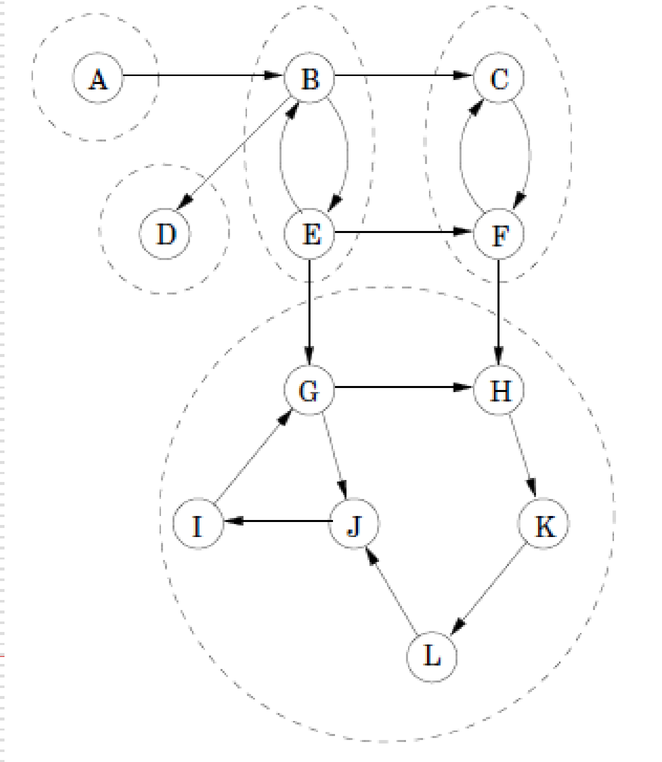
Τοπολογική διάταξη:
1, 3, 8, 6, 11, 10,
9, 4, 5, 7, 2

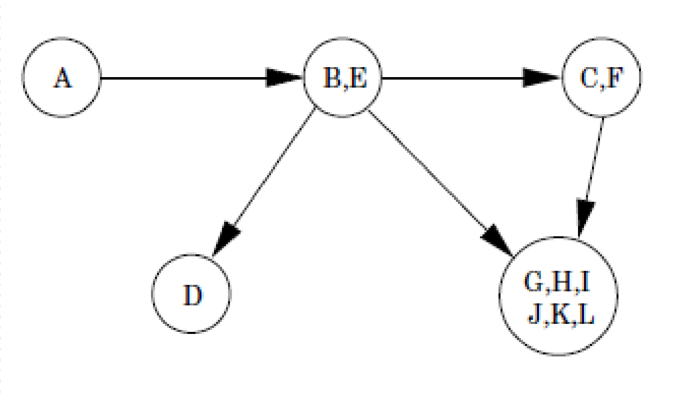
Τοπολογική Διάταξη: Ορθότητα

- Έστω DAG G(V, E). Θδο $\forall(u, v) \in E$, f[u] > f[v].
  - Εξερεύνηση (u, v) συμβαίνει όταν u ΥΕ και v Ανεξ. ή Εξερ.
    - Αν v ΥΕ, τότε (u, v) πίσω ακμή $\Rightarrow$ κύκλος! ΑΤΟΠΟ
  - Αν v Εξερ., τότε εξερεύνηση της v ολοκληρώθηκε πριν ολοκληρωθεί εξερεύνηση u, άρα f[u] > f[v].
  - Αν v Ανεξ., τότε v απόγονος της u στο DFS-δάσος.
    - Άρα f[u] > f[v], γιατί πρώτα τίθεται f[v] και μετά f[u].
- Έστω σύστημα με n (πραγματικές) μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ και m περιορισμούς της μορφής $x_i < x_j$.
  - Αλγόριθμος με χ.ε. O(n+m) που υπολογίζει μια λύση του συστήματος ή αποφαίνεται ότι το σύστημα δεν έχει λύση;

Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες

- Έστω κατ. γράφος G(V, E). Θέλω να βρω ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCC)
- Κάθε γράφος μπορεί να παρασταθεί ως DAG των SCC του:

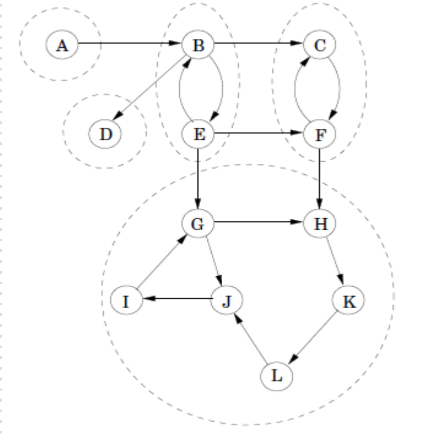


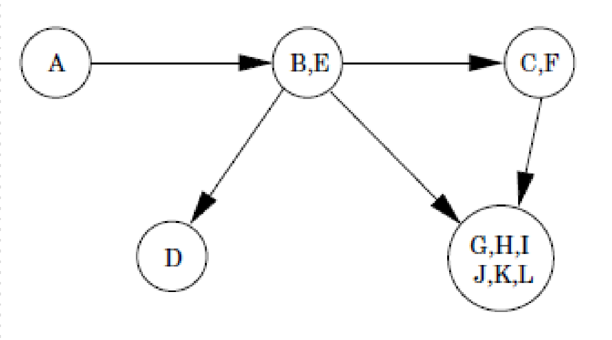


Σχήματα από βιβλίο "Algorithms" (Dasgupta-Papadimitriou-Vazirani)

Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες

- Έστω κατ. γράφος G(V, E). Θέλω να βρω ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCC)
- Κάθε γράφος μπορεί να παρασταθεί ως DAG των SCC του:

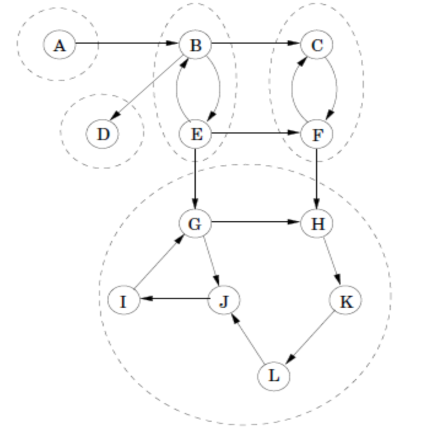


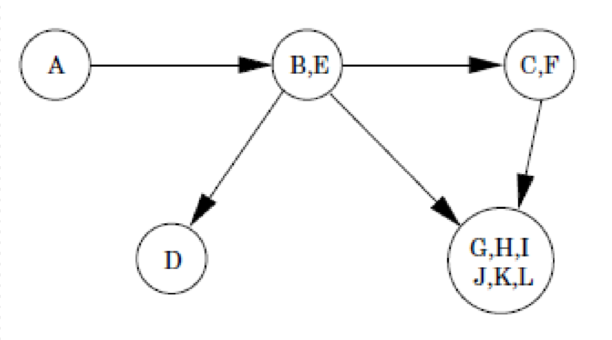


- Τι θα εξερευνήσει η DFS αν ξεκινήσει από τυχαίο σημείο;
- Από πού πρέπει να ξεκινήσει η DFS;

Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες

- Σωστό σημείο εκκίνησης: (κόμβος σε) συνιστώσα-καταβόθρα (sink component)

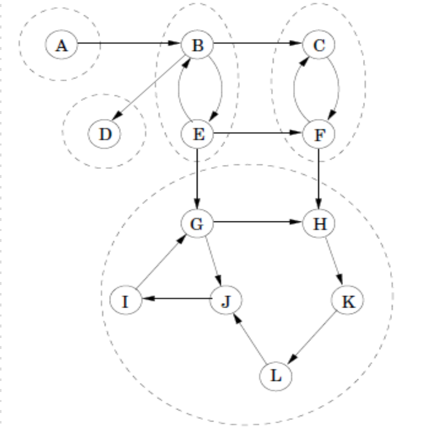


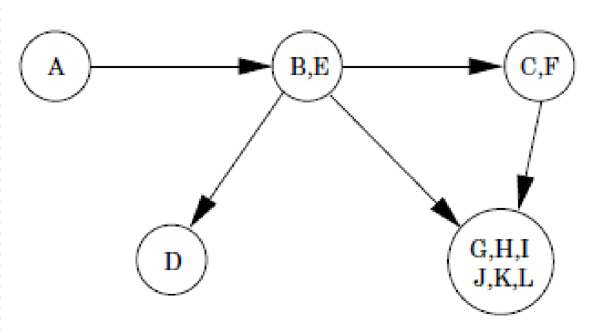


- Αποτέλεσμα: πλήρης εξερεύν. συνιστώσας αυτής και μόνο!
- Πώς βρίσκουμε κόμβο σε συνιστώσα-καταβόθρα;
- Ιδέα: μπορώ να βρώ κόμβο σε συνιστώσα-πηγή: μέγιστο f(u)

Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες

- Σωστό σημείο εκκίνησης: (κόμβος σε) συνιστώσα-καταβόθρα (sink component)





- Πώς βρίσκουμε κόμβο σε συνιστώσα-καταβόθρα;
- Ιδέα: μπορώ να βρώ κόμβο σε συνιστώσα-πηγή: μέγιστο f(u)
- Και: συνιστώσα-καταβόθρα = συνιστώσα-πηγή σε G^R !!

Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες

- Αλγόριθμος
  - Εκτέλεση DFS σε G^R , καταγραφή $f^R(u)$
  - Εκτέλεση DFS σε G, επιλογή ανεξερ. κόμβων κατά φθίνουσα σειρά $f^R(u)$